Зачет по учебной дисциплине ЕН.01 Математика для группы Э – 18.

(задания рассчитаны на три пары).

Выполняем задания по вариантам, данным в таблице ( в МУ задания для решения выделены желтым цветом). Задания надо отправить до 20 мая. Успехов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Практические работы | №1 | №2(1) | №2(2) | №3 | №4 | №5 | №6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | Березин Дмитрий Николаевич | 1 | 8 | 1 | 1 | 6 | 1 | 12 |
| 2 | Владыкин Кирилл Юрьевич | 2 | 7 | 2 | 2 | 5 | 2 | 11 |
| 3 | Вяткин Владимир Андреевич | 3 | 6 | 3 | 1 | 4 | 3 | 10 |
| 4 | Вяткин Илья Михайлович | 4 | 5 | 4 | 2 | 3 | 4 | 9 |
| 5 | Гибрагимов Сергей Вячеславович | 5 | 4 | 5 | 1 | 2 | 5 | 8 |
| 6 | Дукмасов Николай Дмитриевич | 6 | 3 | 6 | 2 | 1 | 6 | 7 |
| 7 | Искаков Артур Сергеевич | 7 | 2 | 7 | 1 | 1 | 7 | 6 |
| 8 | Капралов Кирилл Александрович | 1 | 1 | 8 | 2 | 2 | 8 | 5 |
| 9 | Кулаков Павел Викторович | 2 | 8 | 1 | 1 | 3 | 9 | 4 |
| 10 | Ларьков Илья Сергеевич | 3 | 7 | 2 | 2 | 4 | 10 | 3 |
| 11 | Окулов Алексей Николаевич | 4 | 6 | 3 | 1 | 5 | 1 | 2 |
| 12 | Попов Сергей Николаевич | 5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 2 | 1 |
| 13 | Романов Виктор Николаевич | 6 | 4 | 5 | 1 | 6 | 3 | 5 |
| 14 | Ткаченко Максим Владиславович | 7 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 | 6 |
| 15 | Федотов Дмитрий Николаевич | 1 | 2 | 7 | 1 | 4 | 5 | 4 |
| 16 | Филатов Евгений Дмитриевич | 2 | 1 | 8 | 2 | 3 | 6 | 7 |
| 17 | Фролов Виктор Николаевич | 3 | 8 | 1 | 1 | 2 | 7 | 3 |
| 18 | Хамидуллин Айдар Зульфатович | 4 | 7 | 2 | 2 | 1 | 8 | 8 |
| 19 | Шилов Дмитрий Сергеевич | 5 | 6 | 3 | 1 | 1 | 9 | 2 |
| 20 | Ширяев Вадим Викторович | 6 | 5 | 4 | 2 | 2 | 10 | 10 |
| 21 | Щелёв Дмитрий Григорьевич | 7 | 4 | 5 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 22 | Рычагов Василий Владимирович | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 | 5 | 11 |
| 23 | Деменев Егор Сергеевич | 2 | 2 | 7 | 1 | 5 | 7 | 12 |
| 24 | Белкин Илья Андреевич | 3 | 1 | 8 | 2 | 6 | 9 | 8 |

Министерство образования и науки Пермского края

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

 «Нытвенский многопрофильный техникум»

**Методические указания**

**к выполнению практических работ по дисциплине**

**ЕН.01 МАТЕМАТИКА**

для специальности

08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

Нытва, 2020

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине составлены в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины, разработанной на основе Федерального государственного образовательного стандарта специальностей среднего профессионального образования 08.02.09 Монтаж, наладка и эксплуатация электрооборудования промышленных и гражданских зданий.

 Утверждаю

 зам.директора по ИМР

 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Мялицина Т.Г.

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020г.

Рассмотрена и одобрена

на заседании П(Ц)К математических

и естественнонаучных дисциплин

Протокол №\_\_\_\_\_ от «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2020г.

Председатель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Каменева О.В.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Организация разработчик:

ГБПОУ «Нытвенский многопрофильный техникум»

Разработчик: Кашина Светлана Павловна, преподаватель математики.

**Содержание**

Пояснительная записка

Методические указания по проведению практических работ:

№1. Действия с матрицами

№2. Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами

№3. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

№4. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

№5. Исследование функции при помощи производных

№6. Исследование и построение графиков сложных функций

# Пояснительная записка

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

 В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Критерии оценки:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

# Методические указания по проведению

# практической работы № 1

# Действия с матрицами

**Цель работы:**

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Действия с матрицами»

**Перечень справочной литературы :**

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

## Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

**Краткие теоретические сведения:**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, которую записывают в следующем виде:

.

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица *B* имеет размер *m*x*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица  имеет размер *2*x*3*. Далее, *bij* - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j-*го столбца данной матрицы (в примере *b23=5)*.

При ссылке на *i-ю* строку матрицы *A* используют обозначение *Ai*, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение *Aj*.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы *a11 , a22 ,…, ann* квадратной матрицы *A* (размера *n*x*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней)* *треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

, , , 

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A=B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

*Арифметические действия с матрицами.*

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

.

Чтобы найти *сумму матриц* *A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

.

*Пример 1.* Найти *2A-B*, если , .

*Решение.* Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:



Имеем: 



*Произведение* *AB* можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p,* и ее элемент *cij* находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:  (i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева)умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

*Пример 2.* Найти произведение матриц  и .

*Решение.* Размер матрицы *A* *3*x*2*, матрицы *В 2*х*2*. Поэтому произведение *АВ* найти можно, произведение *ВА* – нет. Действуя, по сформулированному выше правилу, получаем:



Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица *AT* размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если , то .

*Пример 3.* Найти .

*Решение.* Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

.

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

*Рангом* матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение  *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше  (например, для матрицы *А* размера *2*x*3 *). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент *b12*, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ():



*Вычисление определителей.* Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

 

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*x*3*  (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*



*Пример 4.* Найти: 

*Решение.* При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой , а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой .

**Порядок проведения работы:**

1. Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.
2. Соответствующим образом оформить работу

**Задания по теме № 1:**

**Задание 1**.

Вычислить определители:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) ; | 2) ; | 3)  |
| 4) ; | 5) ; | 6)  |
| 7) ; |  |  |

# Методические указания по проведению

# практической работы № 2

# Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами

**Цель работы:**

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

**Перечень справочной литературы :**

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

## Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

**Краткие сведения теории.**

**1**.Пусть дана система линейных уравнений

 ** (1)**

 Коэффициенты a11,12,..., a1n, ... , an1 , b2 , ... , bn считаются заданными.

Вектор -строка ⎨x1 , x2 , ... , xn ⎬ - называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо переменных все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

 Определитель n-го порядка Δ=⎜Α⎢=⎜a ij ⎜, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). В зависимости от определителя системы (1) различают следующие случаи:

 a) Если Δ≠0, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера** : **x1=,** где

определитель n-го порядка Δi ( i=1,2,...,n) получается из определителя системы путем замены i-го столбца свободными членами b1 , b2 ,..., bn.

 б) Если Δ=0 , то система (1) либо имеет бесконечное множество решений , либо несовместна ,т.е. решений нет.

2. Рекомендации по выполнению заданий

1. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

** (2).**

 **1.** В данной системе составим определитель  и вычислим**.**

 **2.** Составить и вычислить следующие определители**:**

 ** .**

 **3.** Воспользоваться **формулами Крамера.**

 ****

Практическое значение правила Крамера для решения системы *n* линейных уравнений с *п* неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять *п +1* определителей *n*-го порядка: *Δ, Δx1,Δx2, …,Δxn*. Более удобным является так называемый *метод Гаусса.* Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

#### Примеры решения систем линейных уравнений методом Крамера

**Пример 1**

****

 **  **

 ** .**

 **Проверка:**

 **** Ответ: ( 3 ; -1 ).

**Пример 2**

****

 ****

 ****

 ****

**Проверка:**

 **** Ответ: x=0,5; y=2; z=1,5 .

Более удобным является так называемый *метод Гаусса.* Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

 Итак, пусть дана система, содержащая *m* линейных уравнений с *п* неизвестными:

 *а11х1 + а12х2 + …+ а1nхn = b1;*

 *а21х1 + а22х2 + …+ а2nхn = b2;*

*.  ……………………………………*

 *аm1х1 + аm2х2 + …+ аmnхn = bm*

 **Метод Гаусса** решения системы заключается в последовательном исключении переменных.

 Схема единственного деления. Рассмотрим простейший вариант метода Гаусса, называемый *схемой единственного деления*.

Прямой ход состоит из *n* − 1 шагов исключения.

1-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного *x*1 из уравнений с номерами *i* = 2, 3, …, *n*. Предположим, что коэффициент *a*11 ≠ 0. Будем называть его *главным элементом* 1-*го шага*.

Найдем величины

*qi*1 *= ai*1/*a*11 (*i =* 2, 3, …, *n*),

называемые *множителями* 1-*го шага*. Вычтем последовательно из второго, третьего, …, *n-*го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на *q2*1*, q*31*, …, qn*1. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при *x*1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

*a*11*x*1 + *a*12*x*2 + *a*13*x*3 + … + *a*1*nxn*= *b*1 ,

*a*22(1)*x*2 + *a*23(1)*x*3 + … + *a*2*n*(1)*xn*= *b*2(1) ,

*a*32(1)*x*2 + *a*33(1)*x*3 + … + *a*3*n*(1)*xn*= *b*3(1) ,

. . . . . . . . . . . . . . .

*an*2(1)*x*2 + *an*3(1)*x*3 + … + *ann*(1)*xn*= *bn*(1) .

в которой *aij*(1) и *bij*(1) вычисляются по формулам

*aij*(1) = *aij − qi*1*a*1*j*  , *bi*(1) = *bi − qi*1*b*1.

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного *x*2 из уравнений с номерами *i =* 3, 4, …, *n*. Пусть *a*22(1) ≠ 0, где *a*22(1) ­– коэффициент, называемый *главным* (или *ведущим*) *элементом* 2-*го шага*. Вычислим множители 2-го шага

*qi*2 = *ai*2(1) / *a*22(1) (*i =* 3, 4, …, *n*)

и вычтем последовательно из третьего, четвертого, …, *n-о*го уравнения системы второе уравнение, умноженное соответственно на *q*32, *q*42, …, *qm*2. В результате получим систему

 *a*11*x*1 + *a*12*x*2 + *a*13*x*3 + … + *a*1*nxn* = *b*1 ,

 *a*22(1)*x*2 + *a*23(1)*x*3 + … + *a*2*n*(1) = *b*2(1) ,

 *a*33(2)*x*3 + … + *a*3*n*(2)*xn* = *b*3(2) ,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

 *an*3(2)*x*3 + … + *ann*(2)*xn*= *bn*(2) .

Здесь коэффициенты *aij*(2) и *bij*(2) вычисляются по формулам

*aij*(2) = *aij*(1) – *qi*2*a*2*j*(1) , *bi*(2) = *bi*(1) – *qi*2*b*2(1).

Аналогично проводятся остальные шаги. Опишем очередной *k-*й шаг.

*k-*й шаг. В предположении, что *главный* (*ведущий*) *элемент k-о*го шага *akk*(*k*–1) отличен от нуля, вычислим *множители k-го шага*

*qik = aik*(*k*–1) / *akk*(*k*–1) (*i = k* + 1, …, *n*)

и вычтем последовательно из (*k* + 1)-го, …, *n*-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы *k*-e уравнение, умноженное соответственно на *qk*+1,*k*, *qk*+2,*k*, …, *qnk*.

После (*n -* 1)-го шага исключения получим систему уравнений

 *a*11*x*1 + *a*12*x*2 + *a*13*x*3 + … + *a*1*nxn* = *b*1 ,

 *a*22(1)*x*2 + *a*23(1)*x*3 + … + *a*2*n*(1)*xn* = *b*2(1) ,

 *a*33(2)*x*3 + … + *a*3*n*(2)*xn* = *b*3(2) ,

 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

 *ann*(*n*–1)*xn* = *bn*(*n*–1) .

матрица ***A***(*n*-1) которой является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

**Алгоритм для решения системы линейных уравнений методом Гаусса**

Выражаем первое неизвестное из первого уравнения и подставляем его в остальные уравнения.

1. Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше.
2. С новой системой поступаем таким же образом и так продолжаем до тех пор, пока не останется одно линейное уравнение, которое легко решается.
3. Когда получено значение последнего неизвестного xn, подставляем его в уравнение, которое позволяет найти xn – 1 по xn.
4. По найденным xn – 1 и xn находим xn – 2 и таким образом находим последовательно все неизвестные.

Для систем нелинейных уравнений этот метод не всегда применим уже в силу того, что из уравнений системы совсем не обязательно можно будет выразить одну неизвестную через остальные.

**Примеры решения систем линейных уравнений методом Гаусса**

**Пример 1**

Решить **методом Гаусса** систему уравнений

 *x1 – 2x2 + x3 + x4 = –1;*

  *3x1 + 2x2 – 3x3 – 4x4 = 2;*

 *2x1 – x2 + 2x3 – 3x4 = 9;*

 *x1 + 3x2 – 3x3 – x4 = –1.*

**Решение**:Составим матрицу *В* и преобразуем ее. Для удобства вычислений отделимвертикальной чертой столбец, состоящий из свободных членов:

 1 –2 1 1 –1

 *B =* 3 2 –3 –4 2

 2 –1 2 –3 9

 1 3 –3 –1 –1

 Умножим первую строку матрицы *В* последовательно на 3, 2 и 1 и вычтем соответственно из второй, третьей и четвертой строк. Получим матрицу,эквивалентную исходной:

 1 –2 1 1 –1

 0 8 –6 –7 5

 0 3 0 –5 11

 0 5 –4 –2 0

Третью строку матрицы умножим на 3 и вычтем ее из второй строки. Затем новую вторую строку умножим на 3 и на 5 и вычтем из третьей и четвертой строк. Получим матрицу, эквивалентную исходной:

 1 –2 1 1 –1

 0 –1 –6 8 –28

 0 0 –1 0 –3

 0 0 0 19 –19

Из коэффициентов последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

 *x1 – 2x2 + x3 + x4 = –1;*

* *X2  – 6x3 + 8x4  = –28;*

 *– x3  = –3;*

 *19x4  = –19.*

Решим полученную систему методом подстановки, двигаясь последовательно от последнего уравнения к первому. Из четвертого уравнения *x4 = –1*, из третьего *х3* = *3*. Подставив значения *х3* и *x4* во второе уравнение, найдем *x2 = 2*. Подставив значения *x2, x3, x4* в первое уравнение, найдем *x1 = 1.*

 Ответ. (1; 2; 3;-1).

**Контрольные вопросы:**

* понятие определителя n-ого порядка;
* методы решения систем линейных уравнений;
* решение систем линейных уравнений методом Крамера;
* формулы Крамера;
* решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

**Порядок выполнения работы:**

1. Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание
2. Соответствующим образом оформить работу

**Задания по теме №2 (1):**

**Решение систем линейных уравнений методом Крамера**

**ВАРИАНТ 1**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 2**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 3**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 4**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 5**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 6**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 7**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 8**

**Решить системы:**

****

**Примеры по теме № 2(2)**

**Решение систем линейных уравнений методом Гаусса**

**ВАРИАНТ 1**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 2**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 3**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 4**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 5**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 6**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 7**

**Решить системы:**

****

**ВАРИАНТ 8**

**Решить системы:**

****

#

# Методические указания по проведению

# практической работы № 3

# Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

**Цель работы:**

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»

**Перечень справочной литературы :**

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

## Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

**Краткие теоретические сведения:**

#### Основные понятия

 Квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными числами образуют множество, которое называют множеством ***комплексных чисел.***

 **Комплексным числом** - называется выражение вида z = a+b ***i*** , где a и b действительные числа, число а называется действительной частью комплексного числа z = a+b***i*,** а число b – его мнимой частью, а ***i*** – мнимая единица, определяемая равенством ***i***² = -1.

Например, действительная часть комплексного числа z = 2+3***i*** равна a =2, а мнимая равна b = 3.

Действительные числа: z=a+0i=a, z=Re z.

Мнимые числа: z=0+bi=bi, z=Im z.

Равные комплексные числа: z1=a+bi, z2=c+di, z1=z2, если a=c, b=d.

Противоположные комплексные числа: z=a+bi, z=-a-bi.

Сопряженные комплексные числа: z=a+bi, z=a-bi.

##  Алгебраическая форма записи комплексных чисел: z =a + bi

##### **Сложение и умножение комплексных чисел**

***Суммой*** двух комплексных чисел z1=a+b***i*** и z2= c+d***i*** называется комплексное число: z = z1 + z2  = (a+b***i*** ) + ( c+d***i*** ) = (a+c**) + (**b+d)***i***,

***Произведением***двух комплексных чисел z1=a+b***i*** и z2= c+d***i*** называется комплексное число : z = z1  z2 =( a+b***i*** )( c+d***i*** )=(ac – bd) + (ad + bc)***i***

Из формул вытекает, что сложение и умножение можно выполнять по правилам действий с многочленами, считая ***i***2= –1. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами действительных чисел. Основные свойства:

***Переместительное свойство:***

 Z1+Z2=Z2+Z1, Z1Z2=Z2Z1

***Сочетательное свойство:***

 (Z1+Z2)+Z3=Z1+(Z2+Z3), (Z1Z2)Z3=Z1(Z2Z3)

***Распределительное свойство:***

 Z1(Z2+Z3)=Z1Z2+Z1Z3

##  Геометрическое изображение суммы комплексных чисел



 Рисунок 1.

 Согласно определению сложения двух комплексных чисел, действительная часть суммы равна сумме действительных частей слагаемых, мнимая часть суммы равна сумме мнимых частей слагаемых. Точно также определяются координаты суммы векторов (Рис.1).

### Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание комплексных чисел – это операция, обратная сложению: для любых комплексных чиселZ1 и Z2 существует, и притом только одно, число Z, такое, что: Z + Z2=Z1 Z = Z1 – Z2

Число Z=Z1+(-Z2 )называют ***разностью чисел*** Z1 и Z2.

 **Z=** (a+b***i*** ) - ( c+d***i*** ) = (a-c**) + (**b-d)***i***,

Деление вводится как операция, обратная умножению: Z⋅Z2=Z1

Разделив обе части на Z2 получим: Z=

Из этого уравнения видно, что Z20

Производится умножение делимого и делителя на число, сопряженное делителю. Z== 



 **Геометрическое изображение разности комплексных чисел**

 Рисунок 2

 Разности Z2 – Z1 комплексных чисел Z1 и Z2, соответствует разность векторов, соответствующих числам Z1 и Z2. Модуль  разности двух комплексных чиселZ2 и Z1 по определению модуля есть длина вектора Z2 – Z1. Построим этот вектор, как сумму векторов Z2 и (–Z1) (рисунок 2). Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

#### Примеры вычислений

***Пример 1:*** Найти сумму и произведение комплексных чисел Z1=2 – 3⋅***i*** и

Z2= –7 + 8***⋅i***.

Z1 + Z2 = 2 – 7 + (–3 + 8)***⋅i = –***5 + 5***⋅i***

Z1⋅Z2 = (2 – 3***⋅i***)⋅(–7 + 8***⋅i***) = –14 + 16***⋅i*** + 21***⋅i*** + 24 = 10 + 37***⋅i***



***Пример 2:*** Найти сумму и произведение комплексных чисел Z1=1 + 2⋅***i*** и Z2= 2 - ***i***.

 Имеем 



***Пример 3:***

Даны комплексные числа Z1= 4 + 5***i*** и Z2= 3 + 4***i***. Найти разность Z2 – Z1 и частное 

Z2 – Z1 = (3 + 4*i*) – (4 + 5*i*) = –1 – *i*

==

**Контрольные вопросы:**

* понятие комплексного числа (К.Ч.);
* алгебраическая форма записи К.Ч;

 - арифметические операции над К.Ч.

**Порядок проведения работы:**

1. Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.
2. Соответствующим образом оформить работу

**Задания по теме № 3:**

**Вариант № 1**

1. Дано комплексное число

 **Z = 21 – 4 i**

 Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.

1. Выполнить действие

 **Z = ( 3 - 2 i ) + ( - 6 - 2 i )**

1. Выполнить умножение

**Z = ( 3 + 4 i ) ( 1 + 3 i )**

1. Выполнить деление

**Z = ( - 6 + 2 i ) : ( 3 - 4 i )**

1. Выполнить действия

**Z = ( 5 + 2 i ) : ( 2 - 5 i ) + (7 + 3 i ) : ( 1 - 2 i )**

**Вариант № 2**

1. Дано комплексное число

**Z = 3 + 9 i**

Записать число равное, противоположное, сопряженное исходному.

1. Выполнить действие

**Z = ( 5 + 3 i ) + ( - 2 - 5 i )**

1. Выполнить умножение

**Z = ( -2 + 3 i ) ( -1 - 6 i )**

1. Выполнить деление

**Z = ( 4 +- 3 i ) : ( -2 - 5 i )**

1. Выполнить действия

**Z = ( -1 + 3 i ) : ( 5 + i ) - ( 3 - 4 i ) : ( 4 + 3 i )**

# Методические указания по проведению

# практической работы № 4

# Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

**Цель работы:**

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных и дифференциалов высших порядков»

**Перечень справочной литературы :**

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

## Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

**Краткие теоретические сведения:**

**Правила дифференцирования**

1) ;

2) , в частности ;

3) ;

4) , если;

5) , если  и .

**Формулы дифференцирования**



в частности, 

в частности, 

 в частности, 



**Примеры нахождения производной элементарных функций:**

1) 

2) 

3) 

 



**Производная сложной и обратной функций**

**Определение.** Пусть  и , тогда - сложная функция с промежуточным аргументом  и независимым аргументом .

**Теорема.** Если функция  имеет производную  в точке , а функция  имеет производную  в соответствующей точке , то сложная функция  имеет производную  в точке  которая находится по формуле .

**Правило нахождения производной сложной функции:**

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

***Пример.*** Вычислить производную сложной функции:

 1) .

*Решение:*





**Обратная функция**

**Определение.** Пусть задана функция  с областью определения *D* и множеством значений . Если каждому значению  соответствует единственное значение , то определена функция  с областью определения  и множеством значений *D* (рис1). Такая функция  называется обратной к функции  и записывается в следующем виде: . Про функции  и  говорят, что они являются взаимно обратными.

 ****

 D

 E

 **** *(рис 1)*

***Примеры:***

1)  и 

2)  и 

3)  и 

( Для того, чтобы для функции  найти обратную функцию надо переменную  выразить через переменную у).

**Теорема**. Если функция  строго монотонна на интервале (а;b) и имеет не равную нулю производную  в производной точке этого интервала, то обратная ей функция  также имеет производную  в соответствующей точке, определяемую равенством .

***Пример:***

1.Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную функции 

Решение: Обратная функция  имеет производную . Следовательно,

.

**Дифференциал функции**

**Определение.** Если функция  дифференцируема в точке  , т.е. имеет в этой точке конечную производную, то ее приращение  можно записать в виде , где .

Главная, линейная относительно  часть  приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается:

**. **

При достаточно малых  приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. .

**Примеры:**

1. Найти дифференциал функции у = .

Решение:

Используя формулу, **** получаем *dy* = (-sinx+10x)*dx.*

**2.** Для функции  найти приращениепри и.

Решение:

Используя формулу,  получаем ()=

=(). Выполняя подстановку  и, находим приращение:

=(3)=0,05

Ответ: =0,05

**Порядок проведения работы:**

1.Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

2.Соответствующим образом оформить работу

**Задания по теме № 4:**

**Вариант 1**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Вариант 2**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Вариант 3**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Вариант 4**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Вариант 5**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

**Вариант 6**

Найдите производную функции:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

# Методические указания по проведению

# практической работы № 5,6

# Исследование функции при помощи производных

# Исследование и построение графиков сложных функций

**Цель работы:**

**Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Исследование функции при помощи производных. Исследование и построение графиков сложных функций»**

**Перечень справочной литературы :**

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

## Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

**Краткие теоретические сведения:**

**Исследование функции при помощи производных**

**Некоторые теоремы о дифференцируемых**

**функциях**

**Теорема Ролля.** Если функция  непрерывна на отрезке , дифференцируема на интервале (а;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения , то найдется хотя бы одна точка (а;b), в которой производная обращается в нуль, т. е. .

**Теорема Коши.** Если функции  и непрерывны на отрезке , дифференцируемы на интервале (а;b), причем  для  (а;b) то найдется хотя бы одна точка (а;b) такая, что выполняется равенство .

**Теорема Лагранжа.** Если функция  непрерывна на отрезке , дифференцируема на интервале (а;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения , то найдется хотя бы одна точка (а;b) такая, что выполняется равенство .

**Следствие 1** Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

**Следствие 2** Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

**Возрастание и убывание функций**

**Теорема 1.** (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (а;b) функция  возрастает (убывает), то   для любого .

**Теорема 2.** (достаточные условия). Если функция  дифференцируема на интервале (a;b) и   для любого , то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

***Пример.*** Исследовать функцию =x3-3x-4 на монотонность.

Решение:

 



 + - +

 Х

 -1 1

**** при ****

**** при ****

Ответ: даннаяфункция возрастает при и убывает 

**Максимум и минимум функций**

**Теорема (необходимое условие).** Если дифференцируемая функция  имеет экстремум в точке , то ее производная в этой точке равна нулю: =0.

**Теорема (достаточное условие экстремума).** Если непрерывная функция  дифференцируема в некоторой -окрестности критической точки  и при переходе через нее (слева на право) производная меняет знак с плюса на минус, то есть точка максимума, с минуса на плюс, то  - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

**Теорема.** Если в точке  первая производная функции  равна нулю , а вторая производная в точке  существует и отличная от нуля , то при  в точке  функция имеет максимум и минимум - при .

**Выпуклость графика функции. Точки перегиба**

Точка графика непрерывной функции , отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

**Теорема.** Если функция  во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. , то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же  для любого  - график выпуклый вниз.

**Теорема (достаточное условие существования точек перегиба).** Если вторая производная  при переходе через точку в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой есть точка перегиба.

**Асимптоты графика функции**

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая х=а является вертикальной асимптотой графика функции , если , или , или .

Если существует наклонная асимптота у=Rx+b, то R и b находится по формуле: , .

Если R=0, то у=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

**Общая схема исследования функции и построения**

**графика функции**

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых >0 или <0).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

***Пример.*** Исследовать функцию  и построить ее график.

1. 

2. 

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (у>0) в интервалах  и , знакоотрицательна – в  и 

4. Функция  является нечетной т.к. . Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при .

5. Прямые х = 1 и х = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.





Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение у=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая у=0 является асимптотой и при , и при .

6..

Так как у’>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Т.к. , то критическими точками является точки

 х1 = -1 и х2 = 1.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

8. Найдем у”



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах  и ; выпуклый вниз на интервалах  и 



**Задания по теме № 5:**

**Задание.**  Исследовать функцию и построить график.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант №11. y = $x^{3}-3x^{2}+4$
2. y = $\frac{5-2x}{x^{ 2}-4}$
 | Вариант №21. y = $\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-3x+\frac{1}{3}$
2. y = $\frac{x}{x^{ 2}-1}$
 |
| Вариант №31. y = $-x^{3}+3x^{2}-2$
2. y = $\frac{x^{2}}{x^{ 2}-1}$
 | Вариант №41. y = $-x^{3}+3x^{2}-2$
2. y = $\frac{x^{3}}{x^{ 2}-1}$
 |
| Вариант №51. y = $x^{3}-12x+6$
2. y = $\frac{2x}{x^{ 2}+1}$
 | Вариант №61. y = $x^{3}-12x^{2}$-9x+1
2. y = $\frac{1}{x^{ 2}+1}$
 |
| Вариант №71. y= $x^{3}-6x^{2}+9x-3$
2. y = $\frac{2x}{x^{ 2}+1}$
 | Вариант №81. y = $x^{3}-12x^{2}$-9x+1
2. y = $\frac{x^{2}}{x^{ 2}+1}$
 |
| Вариант №91. y = $x^{3}+9x^{2}+24x+12$
2. y = $\frac{x^{2}}{6x^{ }+18}$
 | Вариант №101. y= $\frac{1}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}$-2x-$ \frac{1}{3}$y=$ \frac{1}{3}$ y=$\frac{x^{2}}{x-2}$
 |

**Задания по теме № 6:**

**Задание.** Исследовать функцию и построить её график:

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант№11. y=$x^{3}-3x^{2}+4$
2. y=$\frac{5-2x}{x^{ 2}-4}$
 | Вариант№21. y=$\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-3x+\frac{1}{3}$
2. y=$\frac{x}{x^{ 2}-1}$
 |
| Вариант№31. y=$-x^{3}+3x^{2}-2$
2. y=$\frac{x^{2}}{x^{ 2}-1}$
 | Вариант№41. y=$-x^{3}+3x^{2}-2$
2. y=$\frac{x^{3}}{x^{ 2}-1}$
 |
| Вариант№51. y=$x^{3}-12x+6$
2. y=$\frac{2x}{x^{ 2}+1}$
 | Вариант№61. y=$x^{3}-12x^{2}$-9x+1
2. y=$\frac{1}{x^{ 2}+1}$
 |
| Вариант№71. y=$x^{3}-6x^{2}+9x-3$
2. y=$\frac{2x}{x^{ 2}+1}$
 | Вариант№81. y=$x^{3}-12x^{2}$-9x+1
2. y=$\frac{x^{2}}{x^{ 2}+1}$
 |
| Вариант№91. y=$x^{3}+9x^{2}+24x+12$
2. y=$\frac{x^{2}}{6x^{ }+18}$
 | Вариант№101. y=$\frac{1}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}$-2x-$ \frac{1}{3}$
2. y=$\frac{x^{2}}{x-2}$
 |
| Вариант№111. y=$\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-3x+\frac{1}{3}$
2. y=$\frac{x^{2}}{x^{2}-3}$
 | Вариант№121. y=$-x^{3}+3x^{2}$+9x-$ 2$
2. y=$\frac{x^{2}-1}{3x+5}$
 |