

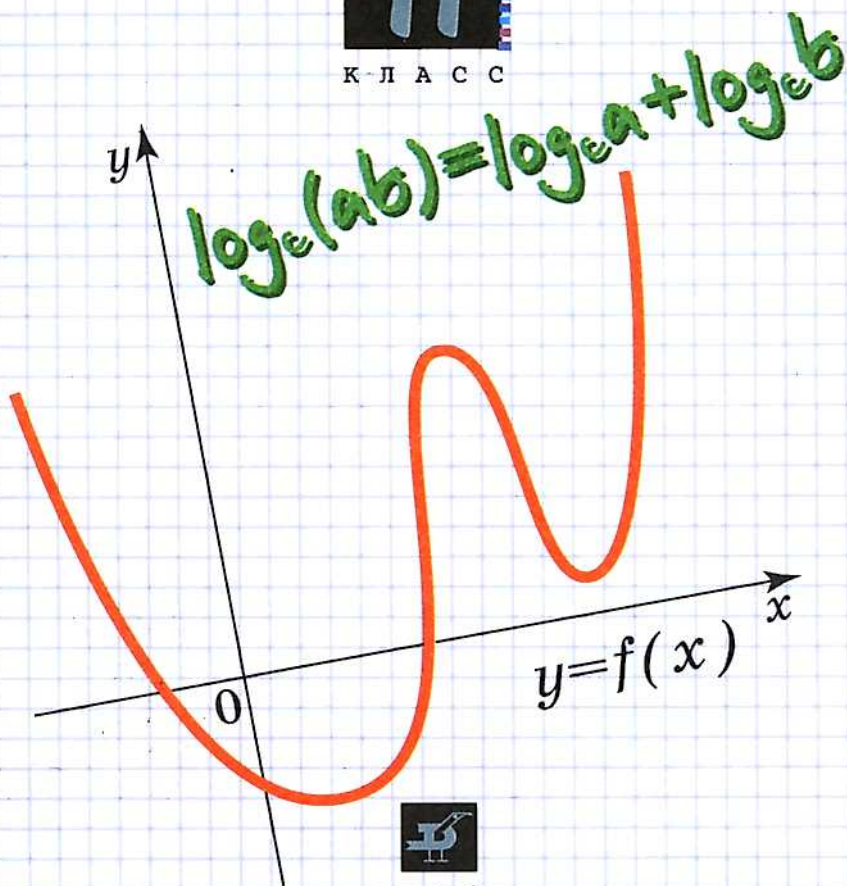
Математика

Сборник заданий

для подготовки и проведения
письменного экзамена
за курс средней школы

11

К Л А С С



ДРОФА

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

для подготовки и проведения
письменного экзамена
по математике (курс А)
и алгебре и началам анализа (курс В)
за курс средней школы

11

К Л А С С

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации



11-е издание, стереотипное



ДРОФА
Москва · 2008

УДК 372.851
ББК 74.262.21
Д69

Дорофеев, Г. В.

Д69 Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс / Г. В. Дорофеев, Г. К. Муравин, Е. А. Седова. — 11-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2008. — 160 с. : ил.

ISBN 978-5-358-04298-8

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Муравин Георгий Константинович
Седова Елена Александровна

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

**для подготовки и проведения письменного экзамена
по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В)
за курс средней школы**

11 класс

Редактор *Ж. И. Яковлева*
Оформление *Д. С. Иванов*
Технический редактор *М. В. Биденко*
Компьютерная верстка *Т. Г. Гончарова, С. Л. Мамедова*
Корректор *Н. С. Соболева*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.008763.07.07 от 25.07.2007.

Подписано к печати 11.10.07. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская, Гарнитура
«Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Тираж 100 000 экз.
Заказ № 18619 (Кр-Л).

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Суцевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим
направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа»
обращаться по адресу: 127018, Москва, Суцевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики,
д. 6, стр. 1А. Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переpletные птицы». Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: <http://www.drofa.ru>

ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 978-5-358-04298-8

© ООО «Дрофа», 1999
© ООО «Дрофа», 2001, с изменениями

Оглавление

Предисловие	4
Раздел 1. Задания 1—5 для экзаменов «Математика» и «Алгебра и начала анализа»	7
Раздел 2. Задания 6, 7 для экзамена «Математика» ..	80
Раздел 3. Задание 8 для экзамена «Математика»	114
Раздел 4. Задания 9, 10 для экзамена «Математика». Задания 6, 7 для экзамена «Алгебра и начала анализа»	124
Тригонометрия	124
Степени и логарифмы	126
Производная и ее приложения	130
Раздел 5. Задание 8 для экзамена «Алгебра и начала анализа»	134
Тригонометрия	134
Иррациональные уравнения	135
Степени и логарифмы	136
Производная и ее приложения	137
Раздел 6. Задания 9, 10 для экзамена «Алгебра и начала анализа»	139
Уравнения	139
Модули	144
Параметры	145
Неравенства	146
Возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения	148
<i>Вариант экзаменационного задания по курсу «Математика»</i>	<i>151</i>
<i>Вариант экзаменационного задания по курсу «Алгебра и начала анализа»</i>	<i>152</i>
Справочный материал	153

Предисловие

Настоящий сборник заданий предназначен для итоговой аттестации в 11 классе по курсу «Математика» (курс А) и по курсу «Алгебра и начала анализа» (курс В). Тексты заданий предполагаются открытыми для использования в обычном учебном процессе или при специальной подготовке (например, в системе экстерната). Экзаменационная работа, составляемая на основе сборника, содержит десять заданий.

Курс А «Математика» (3 ч в неделю)

Экзаменационная работа по курсу «Математика» состоит из двух частей.

Первая часть (задания 1—7) включает пять заданий по алгебре и началам анализа и два геометрических задания. Задания первой части скомпонованы в наборы по семь заданий и помещены в разделе 1 (*задания 1—5*) и разделе 2 (*задания 6, 7*). Всего в сборнике 96 таких наборов. Уровень сложности этих заданий определяется «Требованиями к математической подготовке учащихся», предусмотренными программой.

Задания первой части не требуют громоздких вычислений, сложных преобразований и нестандартных умозаключений. Для их решения достаточно уметь использовать основные определения, владеть минимальным набором формул и алгоритмов. Задания по геометрии требуют, помимо знания формул и умения ими пользоваться, определенного уровня стереометрических представлений, умения работать с изображениями пространственных конфигураций. В то же время уровень доказательности при выполнении заданий предполагается минимальным.

Вторая часть экзаменационной работы по курсу «Математика» состоит из одного геометрического задания (*задание 8*), которое помещено в разделе 3, и двух заданий по алгебре и началам анализа (*задания 9, 10*), которые помещены в разделе 4.

Вторая часть составлена из стандартных для курса математики 10—11 классов заданий, уровень сложности которых несколько выше, чем в первой части. Содержание заданий по геометрии соответствует целям изучения геометрии в курсе «Математика», и для их решения достаточно изучавшегося в курсе геометрического материала. От выпускников, однако, не требуется владения навыками сложных вычислений и преобразований, специальными приемами решения уравнений и неравенств, хотя часть заданий предполагает наличие определенных знаний и умений, приобретенных не только в старших классах, но и в основной школе (подстановка, формулы сокращенного умножения, уравнение прямой и т. п.).

Для получения отметки «3» (*удовлетворительно*) выпускник должен правильно выполнить *любые* пять заданий. Отметка «4» (*хорошо*) выставляется при выполнении любых семи заданий. Отметка «5» (*отлично*) ставится за девять верно выполненных заданий.

Курс В

«Алгебра и начала анализа» (4,5—5 ч в неделю)

Экзаменационная работа по курсу «Алгебра и начала анализа» состоит из трех частей.

Первая часть экзамена (*задания 1—5*) полностью совпадает с первыми пятью заданиями экзамена по курсу «Математика» (раздел 1).

Вторую часть экзамена составляют задания, помещенные в разделах 4 (*задания 6, 7*) и 5 (*задание 8*) сборника. Это традиционные задания, предлагаемые школьникам на выпускном экзамене по курсу «Алгебра и начала анализа».

Третья часть экзамена (*задания 9, 10*) состоит из заданий, подобных тем, которые используются на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения. Они находятся в разделе 6 сборника. Решение этих задач не требует ни дополнительных навыков, ни дополнительных идей по сравнению с задачами, обычно предлагающимися в школьных учебниках. Вместе с тем такие задания или требующиеся для их выполнения идеи нередко ускользают от внимания учителя.

Критерии оценки работы совпадают с критериями для курса «Математика».

Для удобства пользования сборником задания разделов 4—6 сгруппированы по темам.

Экзаменационная работа	Варианты (номера) заданий
«Математика» (курс А)	
<i>Задания 1—5</i>	Варианты 1—96
<i>Задания 6, 7</i>	Варианты 1—96
<i>Задание 8</i>	3.1—3.100
<i>Задания 9, 10</i>	4.1—4.200
«Алгебра и начала анализа» (курс В)	
<i>Задания 1—5</i>	Варианты 1—96
<i>Задания 6, 7</i>	
тригонометрия	4.1—4.50
степени и логарифмы	4.51—4.156
производная и ее приложения	4.157—4.200
<i>Задание 8</i>	
тригонометрия	5.1—5.26
иррациональные уравнения	5.27—5.56
степени и логарифмы	5.57—5.82
производная и ее приложения	5.83—5.100
<i>Задания 9, 10</i>	
уравнения	6.1—6.144
модули	6.145—6.206
параметры	6.207—6.232
неравенства	6.233—6.277
возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения	6.278—6.300

1

Задания 1—5 для экзаменов «Математика» и «Алгебра и начала анализа»

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{x - 4x^2}{x - 1} > 0$.
2. Решите уравнение $\log_2(2x - 1) = 3$.
3. Найдите корни уравнения $2 \sin x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 1). Укажите:
а) область определения функции;
б) промежутки возрастания и убывания функции;
в) при каких значениях x $f(x) = 0$;
г) наибольшее и наименьшее значения функции;
д) при каких значениях x $-4 < f(x) < 2$.
5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

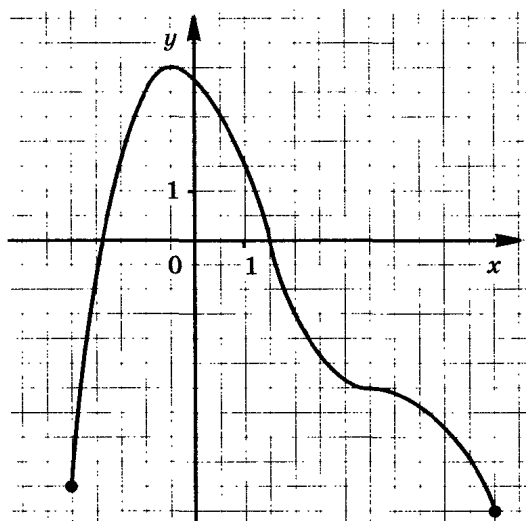


Рис. 1

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31.$$

3. Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 2). Укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) при каких значениях x $f(x) < -2$.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

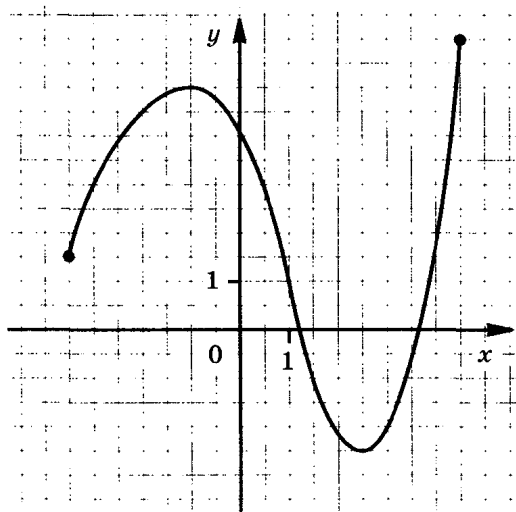


Рис. 2

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{2x + 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$27^{1-x} = \frac{1}{81}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

- область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;
- значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
- в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
- 2 — единственная точка экстремума функции.

5. Найдите производную функции $f(x) = e^x(x^2 + 1)$.

Вариант 4

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2 - x) > -1.$$

3. Докажите тождество

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2.$$

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 3x^3 + 2x - 5$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x) = 4 + 6x^2$, значение которой при $x = 2$ отрицательно.

Вариант 5

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{2x + 1}{x - 1}.$$

2. Решите неравенство

$$8^{2x + 1} > 0,125.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{2} = 0.$$

4. Найдите производную функции $f(x) = 2x^2 + \operatorname{tg} x$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 5x + 6$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Вариант 6

1. Решите неравенство

$$\frac{54 - 6x^2}{4x + 7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$3^x - \left(\frac{1}{3} \right)^{2-x} = 24.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos (\pi + x) = 0.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;

в) промежутки убывания функции $[-5; -2]$ и $[0; 2]$;

г) функция возрастает на промежутке $[-2; 0]$;

д) отрицательные значения функция принимает только в точках промежутка $(1; 2]$.

5. Дана функция $f(x) = x^5 - 5x^2 + 1$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 7

1. Вычислите

$$9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_4(7 - x) < 3.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 3). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-2,5 \leq f(x) \leq 1,5$;

в) промежутки, на которых $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Является ли функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 - 1)$?

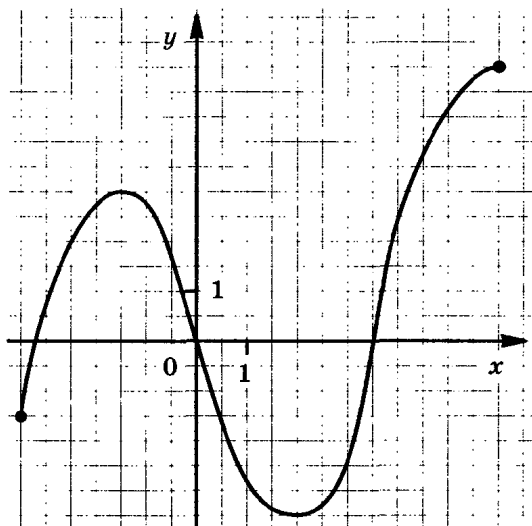


Рис. 3

Вариант 8

1. Вычислите $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.
2. Решите неравенство $\log_9(4 - 3x) > 0,5$.
3. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-3; 5]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
 - в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
 - г) -1 — единственная точка экстремума функции.
5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону
$$S = 5t - 0,5t^2 \text{ (м)},$$
где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

Вариант 9

1. Решите неравенство

$$\frac{(x + 5)(x - 7)}{3x - 1} > 0.$$

2. Решите уравнение $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$.
3. Найдите корни уравнения $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
 - в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
 - г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-4; 0)$.
5. Найдите первообразную функции $f(x) = x^2 - 5$, график которой проходит через точку $(3; 4)$.

Вариант 10

1. Решите неравенство

$$\frac{2x + 8x^2}{2x - 1} < 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_7(x - 1) \leq \log_7 2 + \log_7 3.$$

3. Найдите корни уравнения $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 4). Укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x.$$

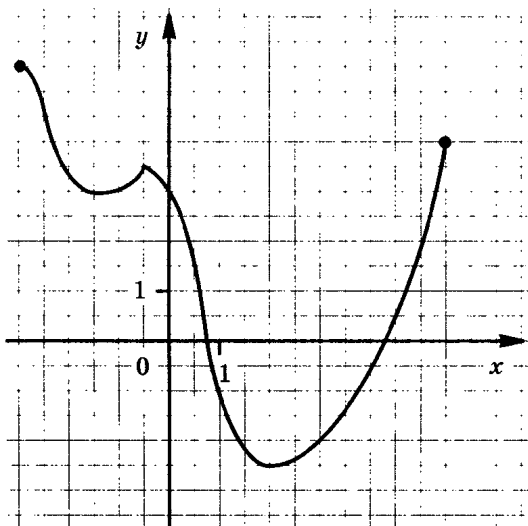


Рис. 4

Вариант 11

1. Решите неравенство $\frac{8x^2 - 2}{3 - x} > 0$.

2. Решите уравнение $36 \cdot 216^{3x+1} = 1$.

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}.$$

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x - \ln x$ в его точке с абсциссой $x = 3$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$, прямыми $x = -2$, $x = -1$ и осью абсцисс.

Вариант 12

1. Решите неравенство $\frac{8x^2 - 2x}{3 - 6x} > 0$.

2. Решите уравнение

$$2 \log_3 2 - \log_3(x - 1) = 1 + \log_3 5.$$

3. Решите уравнение $2 \cos \frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение;

г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-2; 1)$;

д) -1 — единственная точка экстремума функции.

5. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 1$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 13

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{x-2}{4x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$100^{2x+1} < 0,1.$$

3. Решите уравнение

$$4 \cos^2 x - 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 5). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x функция y не имеет производной;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) в какой точке графика касательная к нему параллельна оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

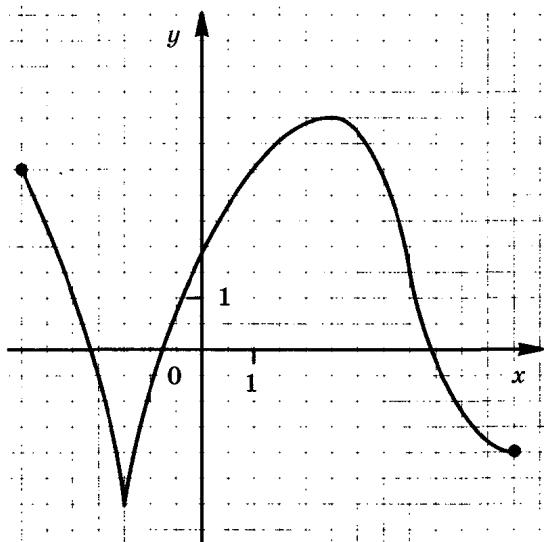


Рис. 5

Вариант 14

1. Вычислите $9^{1,5} - 81^{0,5} - (0,5)^{-2}$.
2. Решите неравенство $\log_2(1 - 2x) < 0$.
3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = -\frac{15}{17}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
4. Изобразите график функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 2]$;
 - в) производная функции положительна на $(-4; 1)$, отрицательна на $(1; 3)$;
 - г) 1 — нуль производной функции;
 - д) -2 и 2 — нули функции.
5. Найдите какую-нибудь первообразную функции

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 2,$$

которая принимает отрицательное значение при $x = 1$.

Вариант 15

1. Вычислите $16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}$.
2. Найдите все целые решения неравенства $\frac{1}{27} \leq 3^{2-x} < 27$.
3. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$.
4. Изобразите график функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
 - в) производная функции положительна на $(2; 5)$, отрицательна на $(-2; -1)$ и на $(-1; 2)$;
 - г) нули производной функции: -1 и 2;
 - д) нули функции: 0 и 3.
5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

Вариант 16

1. Упростите

$$a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{5}{3}} a^{\frac{1}{6}} b^{-\frac{1}{6}}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(2x + 1) > 4.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos \frac{\pi}{6}.$$

4. Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 4 - x^2$, график которой проходит через точку $(-3; 10)$.

Вариант 17

1. Решите неравенство

$$\frac{4x - x^2}{3 + 2x} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(2x + 1) = \log_3 13 + 1.$$

3. Найдите корни уравнения $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

- а) область определения функции есть промежуток $[-6; 1]$;
- б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;
- в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-6; -4)$ и $(-1; 1)$, $f'(x) = 0$ при $x = -4$;
- г) нули функции: $x = -4$ и $x = 0$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x^2 + 3$, график которой проходит через точку $(-2; -5)$.

Вариант 18

1. Решите неравенство

$$\frac{4x - 9x^2}{10 - x} \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{0,5}(3x - 1) = -3.$$

3. Найдите корни уравнения $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 6). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) > 2$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- при каких значениях x $f'(x) = 0$;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x.$$

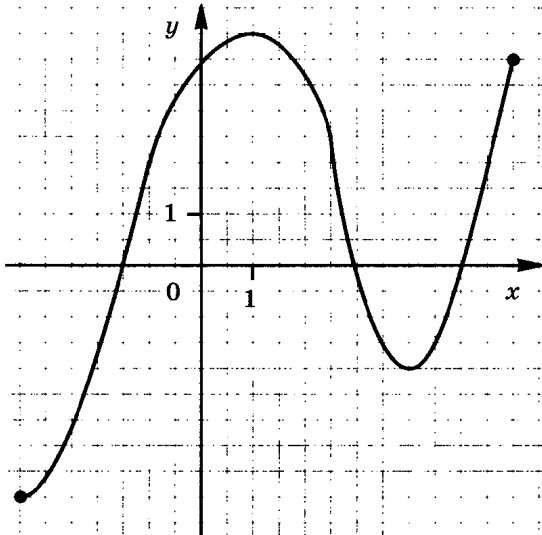


Рис. 6

Вариант 19

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 - 27}{2x + 7} < 0.$$

2. Решите уравнение $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;

в) промежутки возрастания функции: $[-4; -2]$ и $[1; 3]$;

г) функция убывает на промежутке $[-2; 1]$.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = t + 0,5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

Вариант 20

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_5(3x + 1) < 2.$$

3. Найдите $\sin x$, если

$$\cos x = \frac{8}{17}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$ на промежутке $[-5; -1]$.

5. Найдите все функции, которые имеют одну и ту же производную: $f(x) = x + 5$.

Вариант 21

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{2x - 3}{x + 7}.$$

2. Решите неравенство

$$27^{1+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}.$$

3. Решите уравнение

$$7 \cos \left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 5 \sin x + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 7). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-2 < f(x) \leq 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x - 5$, график которой проходит через точку $(4; 10)$.

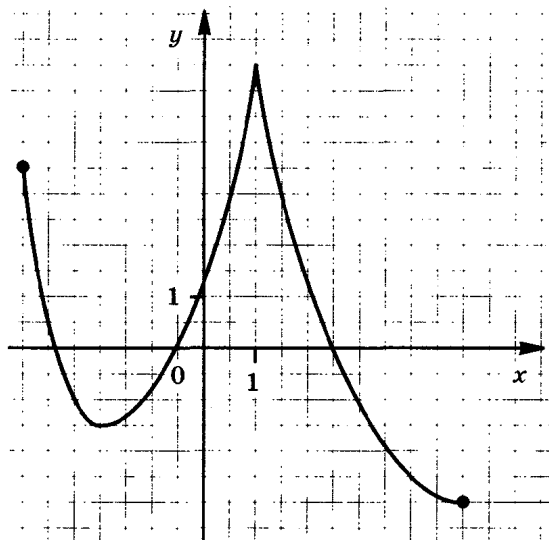


Рис. 7

Вариант 22

1. Упростите $a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{7}{12}} a^{-\frac{3}{4}} b^{-\frac{2}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$\log_5(4x + 1) > -1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 2 = 0,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Дана функция $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 7.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $f(x) = 2x - x^2$.

Вариант 23

1. Упростите $a^{-\frac{9}{2}} b^{\frac{1}{12}} : \left(a^{-\frac{19}{4}} b^{\frac{1}{3}} \right)$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0,2 \leq 5^{x+4} \leq 125.$$

3. Найдите все решения уравнения $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

- а) область ее определения есть промежуток $[-3; 4]$;
- б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
- в) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(0; 3)$;
- г) точки экстремума функции -1 и 2 .

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 4 \cos x + 3$ в его точке с абсциссой

$$x = -\frac{\pi}{3}.$$

Вариант 24

1. Упростите

$$a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{24}} : \left(a^{\frac{5}{12}} b^{\frac{1}{8}} \right).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}} (2x + 3) > -3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^4 + 3x.$$

Вариант 25

1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - 1}{x - 8} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5} (2x) > 2.$$

3. Найдите корни уравнения

$$(\cos x - 1)^2 = \cos^2 x - 1.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-1; 8]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 2]$;

в) функция возрастает на промежутках $[-1; 3]$ и $[5; 8]$, убывает на промежутке $[3; 5]$;

г) нули функции: 3 и 7.

5. Какие из данных функций возрастают на всей области определения $y = \sin x$, $y = x + 1$, $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$?

Вариант 26

1. Решите неравенство

$$\frac{11x^2 - x}{2 + x} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} \log_2 (3x - 2) = 3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 8). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < 1$;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = -x^3 + x^2 + 8x.$$

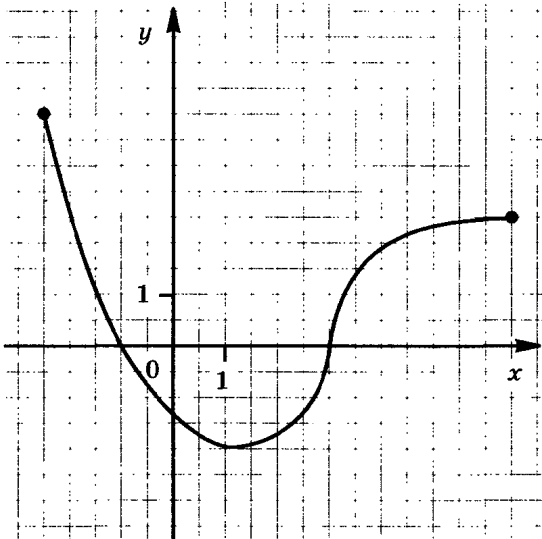


Рис. 8

Вариант 27

1. Решите неравенство

$$\frac{4 - x^2}{2x - 3} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin x + \sin(\pi + x) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 9). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) < -1$;
- при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;
- в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = 4x - x^2.$$

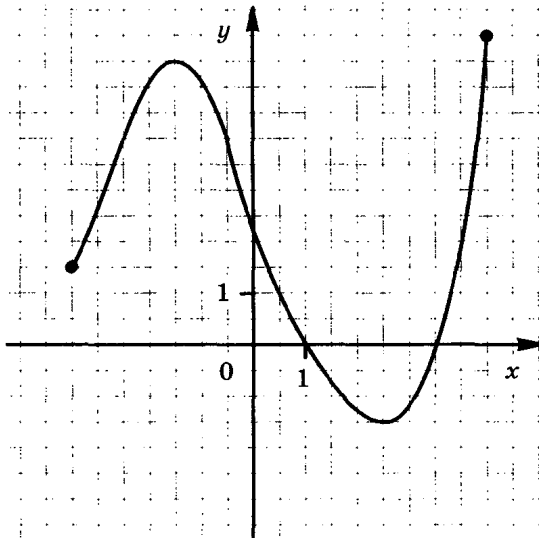


Рис. 9

Вариант 28

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{8 + 15x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$-\log_7(5 - x) = \log_7 2 - 1.$$

3. Найдите $\sin x$, если

$$\cos x = -\frac{5}{13}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 10). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) > 1$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- в какой точке графика касательная к нему параллельна оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Является ли функция $F(x) = x^3 + 3x - 5$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 + 1)$?

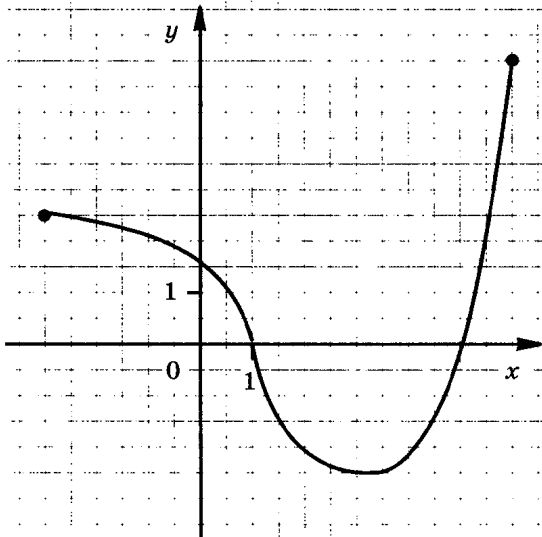


Рис. 10

Вариант 29

1. Найдите область определения функции

$$y = \ln \frac{3x + 4}{5 - x}.$$

2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{2+3x} < 8^{x-1}$.

3. Решите уравнение

$$4 \cos^2 x - 3 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 11). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) < -2$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 8.$$

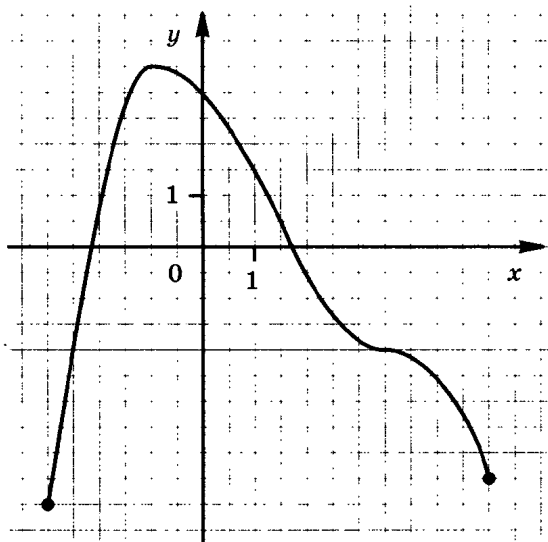


Рис. 11

Вариант 30

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-5)(2x+7)}{4-x} \geq 0.$$

2. Решите уравнение $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = \frac{12}{13}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 12). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) < -1$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 3t + t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

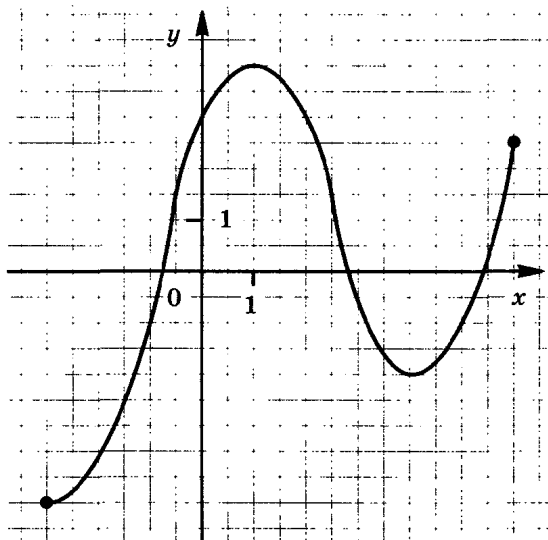


Рис. 12

Вариант 31

1. Вычислите $7^{0,5\log_7 9}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$1 \leq 7^{x-3} < 49.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x + 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 13). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 3,5$;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 5 + 4x - 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -5 .

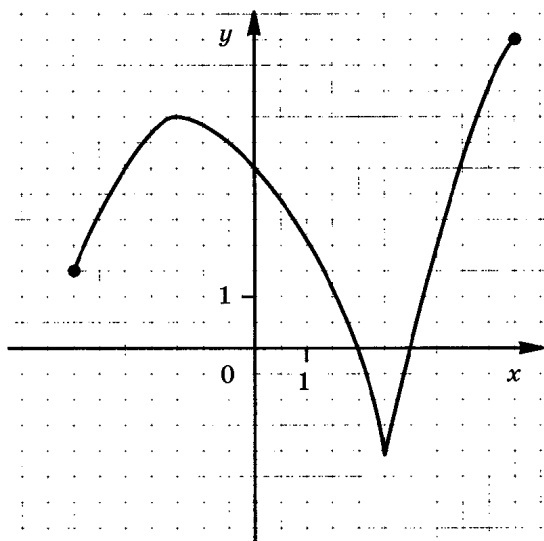


Рис. 13

Вариант 32

1. Вычислите $\frac{\left(a^2 b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{9}{8}}}$ при $a = 7, b = 2$.
2. Решите неравенство $2 \lg 6 - \lg x > 3 \lg 2$.
3. Решите уравнение $\cos(\pi + x) = \sin \frac{\pi}{2}$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
- а) область определения функции есть промежуток $[-6; 2]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
 - в) функция возрастает на промежутках $[-6; -2]$ и $[0; 2]$;
 - г) точки экстремума функции: -2 и 0 .
5. Является ли функция $F(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ первообразной функции $f(x) = 4x^3 - x^2 + x$?

Вариант 33

1. Найдите область определения функции $y = \lg(x^2 - 7x)$.
2. Найдите все целые решения неравенства
- $$\frac{1}{6} < 6^{3-x} \leq 36.$$
3. Докажите тождество $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
- а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
 - в) функция возрастает на промежутке $[-1; 2]$, убывает на промежутке $[2; 6]$;
 - г) значения функции положительны только в точках промежутка $(0; 3)$.
5. Дана функция $f(x) = 3 - 3x - 2x^2$. Найдите координаты точки графика этой функции, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 5.

Вариант 34

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 5x}{2 - 8x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{3} \log_3 (2x + 1) = 1.$$

3. Найдите корни уравнения $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 14). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) при каких значениях x $f(x) \leq -2$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите функции, производной которых является функция

$$f(x) = 2x + x^2.$$

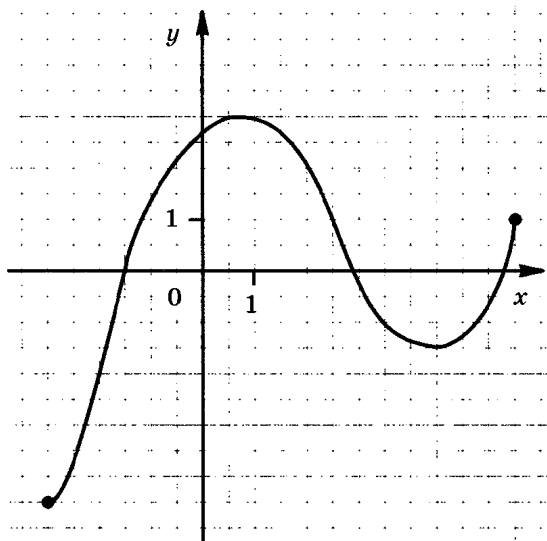


Рис. 14

Вариант 35

1. Решите неравенство

$$\frac{24 - 6x^2}{2x + 9} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x+4} - 2^x = 120.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 15). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1,5$;

в) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x) = 3(x^2 - 2), g(x) = 3x(x^2 - 2) \text{ и } q(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

функция $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

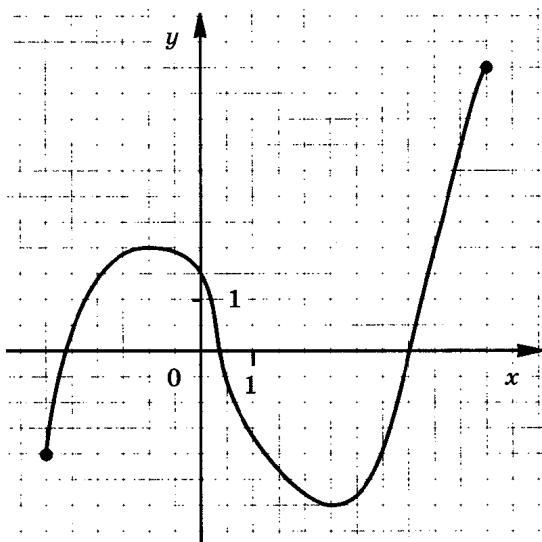


Рис. 15

Вариант 36

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 14x - 15}{10 - 4x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\lg(x + 3) = 3 + 2 \lg 5.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 16). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq 0,5$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции

$$f(x) = x - 2x^3,$$

график которой пересекает ось ординат в точке $(0; 3)$.

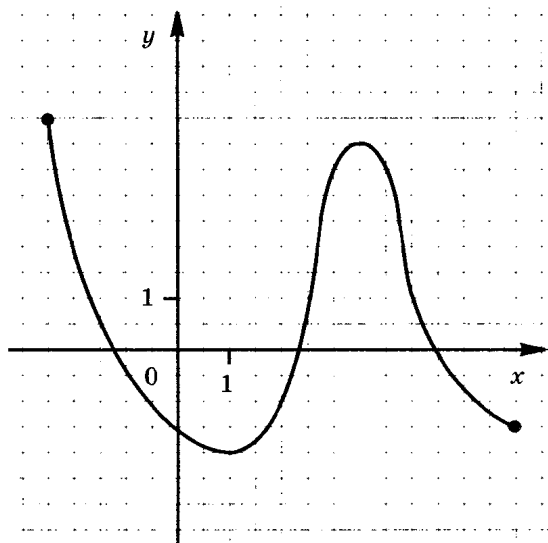


Рис. 16

Вариант 37

1. Найдите область определения функции

$$y = \ln \frac{x+5}{7x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - 6 \sin x = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 17). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) \leq 0,5$;
- точки экстремума функции;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 5t - 0,5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

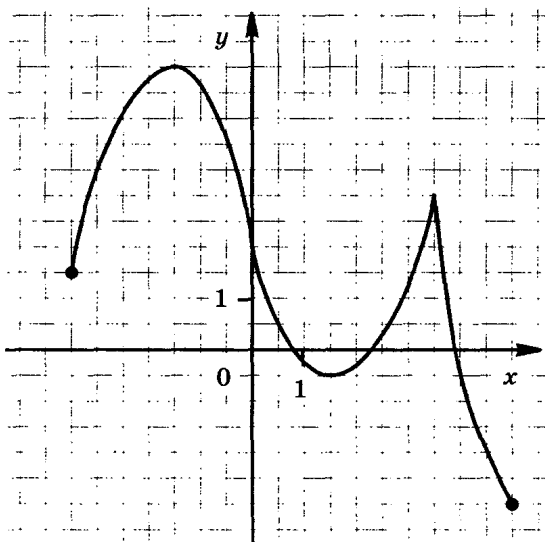


Рис. 17

Вариант 38

1. Вычислите $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$.

2. Решите неравенство $\log_{0,1} x > -1$.

3. Найдите корни уравнения

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 1 + \sin x + \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 18). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq 0$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0,5t^2 + 3t + 4 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

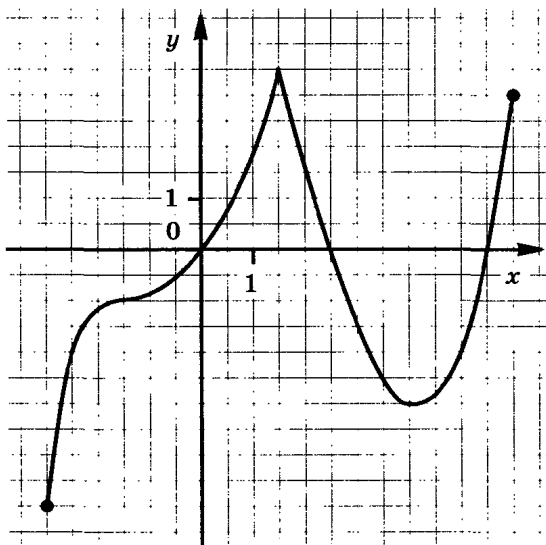


Рис. 18

Вариант 39

1. Решите неравенство

$$\frac{(x+11)(2x-5)}{3x} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x-1} = 7.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 19). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) \leq 0$;
- точки экстремума функции;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$.

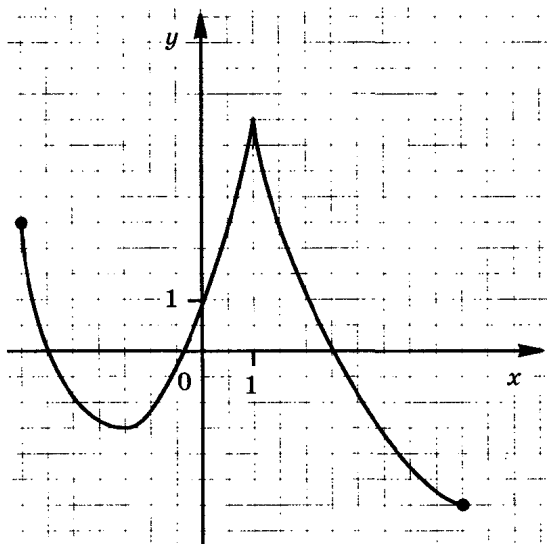


Рис. 19

Вариант 40

1. Вычислите $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \lg 81 - \lg x > \lg 2.$$

3. Решите уравнение $\sin(-x) = \cos \pi$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 3]$;

в) функция убывает на промежутке $[-3; 1]$, возрастает на промежутке $[1; 4]$;

г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-1; 2)$.

5. К графику функции $f(x) = 3 + 7x - 4x^2$ проведена касательная с угловым коэффициентом -9 . Найдите координаты точки касания.

Вариант 41

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg(4x^2 + 11x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0,01 < 10^{2+x} < 10\,000.$$

3. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) функция возрастает на промежутках $[-2; 0]$ и $[3; 5]$, убывает на промежутке $[0; 3]$;

г) нули функции: 0 и 4 .

5. Какие из данных функций убывают на всей области определения: $y = 3x - 2$, $y = -5x + 9$, $y = x^2$, $y = -x^3 + x$?

Вариант 42

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 10x}{2 - 5x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(2x + 1) = \log_2 3 + 1.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin \frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 20). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;
- в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- при каких значениях x $f(x) \geq 2$;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x) = 4x^3 - 8x + 1, \quad g(x) = 4(x^3 - 2) \quad \text{и} \quad q(x) = 4x(x^2 - 2)$$

функция $F(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ является первообразной?

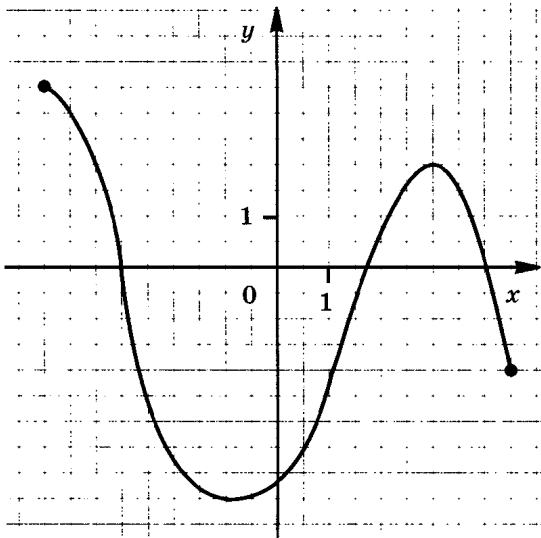


Рис. 20

Вариант 43

1. Решите неравенство

$$\frac{4 - 49x^2}{x - 5} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6.$$

3. Решите уравнение

$$\sin x + \cos(2\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 21). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1$;

в) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = -3x^3 + 6x^2 - 5x.$$

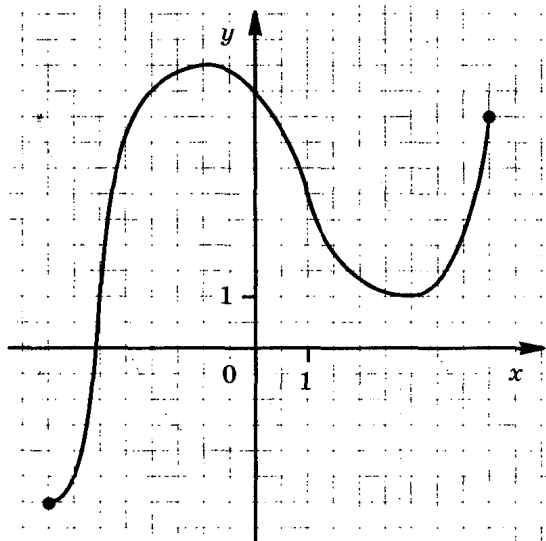


Рис. 21

Вариант 44

1. Решите неравенство $\frac{4x^2 - 16x + 7}{3(x + 2)} < 0$.
2. Решите уравнение $\lg(4x - 2) = 5 \lg 2 - 3$.
3. Докажите тождество $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1$.
4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 22).
Укажите:
 - а) область определения функции;
 - б) при каких значениях x $f(x) \leq 0,5$;
 - в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
 - г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - д) наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону
$$S = t^3 - 3t + 4 \text{ (м)},$$
 где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

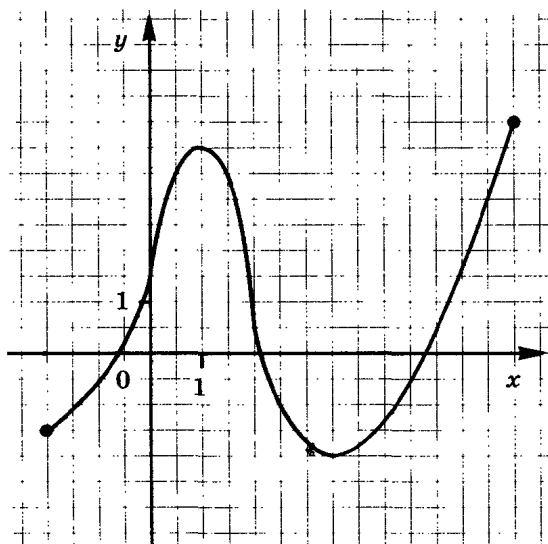


Рис. 22

Вариант 45

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{32 - 8x}{x + 1}.$$

2. Решите неравенство

$$2^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^x < 5.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x - 7 \cos x = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 23). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq -0,5$;

в) точки экстремума функции;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 3.$$

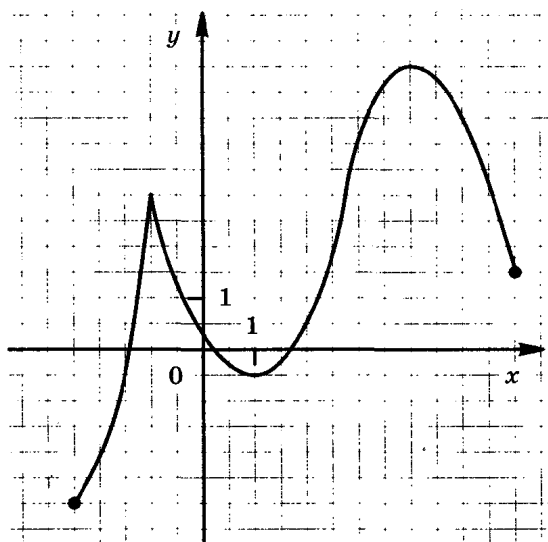


Рис. 23

Вариант 46

1. Вычислите $6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (0,25)^{\frac{1}{4}}$.

2. Решите неравенство

$$\lg(2x + 1) < 0.$$

3. Докажите тождество

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 24). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 3.

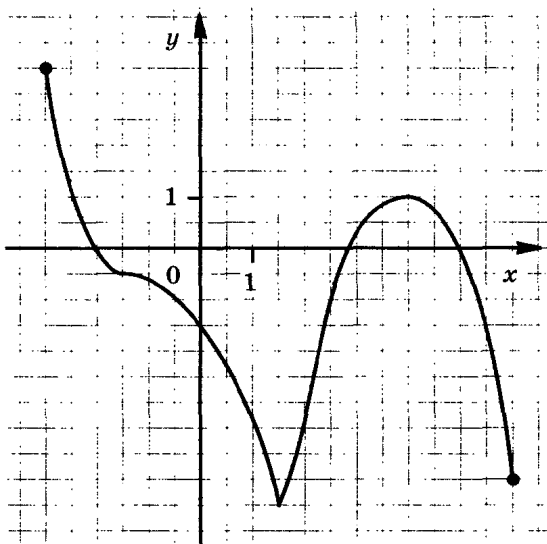


Рис. 24

Вариант 47

1. Решите неравенство

$$\frac{x(x+2)}{1-2x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^x = 5.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \sqrt{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 25). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) \geq 3$;
- точки экстремума функции;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 3x^2 + 5x - 6$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -7 .

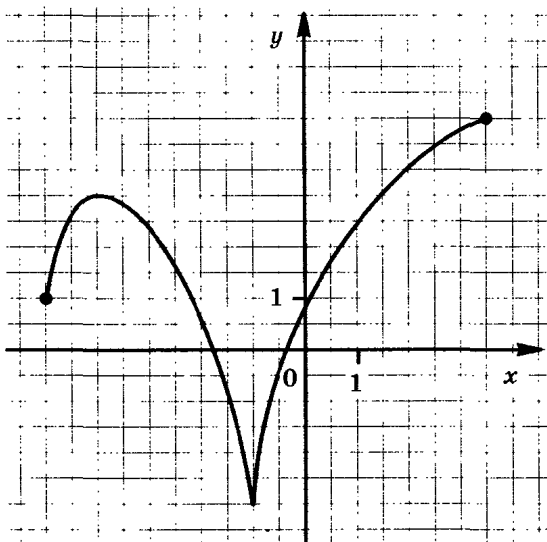


Рис. 25

Вариант 48

1. Вычислите $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$ при $a = 3$.

2. Решите неравенство $\lg x + 2 \lg 2 < 0,5 \lg 49 - \lg 5$.

3. Решите уравнение $\cos(-x) = \cos \frac{\pi}{3}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;

в) функция убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[2; 3]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$;

г) нули функции: -2 и 2 .

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 3x + \sqrt{x} \text{ при } x = 16.$$

Вариант 49

1. Решите неравенство $\frac{(x+10)(2x-3)}{2x} > 0$.

2. Решите уравнение $4^{5x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4x}$.

3. Найдите корни уравнения $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(-1; 1)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-4; -1)$ и $(1; 3)$ — отрицательные значения;

г) график функции имеет единственную касательную, параллельную оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1.$$

Вариант 50

1. Решите неравенство $\frac{16x^2 - x}{12 - x} < 0$.
2. Решите неравенство $\log_3(2x - 1) < 3$.
3. Найдите корни уравнения $2 \cos x - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
 - в) производная функции на промежутке $(0; 2)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 0)$ и $(2; 4)$ — отрицательные значения;
 - г) график функции имеет единственную касательную, параллельную оси абсцисс.
5. Найдите первообразную функции $f(x) = 10x^4 + x$, значение которой при $x = 0$ равно 6.

Вариант 51

1. Решите неравенство $\frac{5x^2 + 4x - 1}{7 - 2x} < 0$.
2. Решите уравнение $\lg(2 - x) = 2 \lg 4 - \lg 2$.
3. Докажите тождество $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
 - в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает отрицательные значения, а на промежутках $(-1; 1)$ и $(3; 6)$ — положительные значения;
 - г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; 4)$ и $(3; -4)$.
5. Найдите производную функции $f(x) = e^x \cos x$.

Вариант 52

1. Решите неравенство $\frac{8 - 32x^2}{x - 10} > 0$.

2. Решите уравнение $3^{x+2} + 3^x = 810$.

3. Решите уравнение

$$\sin x + \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает отрицательные значения, а на промежутках $(-2; 1)$ и $(3; 5)$ — положительные значения;

г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; 4)$ и $(3; 1)$.

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 4 \sin x - \cos x$$

при $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вариант 53

1. Найдите область определения функции $y = \lg \frac{x-1}{8x+1}$.

2. Решите неравенство $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$.

3. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 1 = 0$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-1; 1)$ и $(3; 6)$ — отрицательные значения;

г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; -1)$ и $(3; 2)$.

5. Найдите производную функции $f(x) = x^2 \ln x$.

Вариант 54

1. Вычислите $\frac{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$ при $a = 4$, $b = 11$.

2. Решите неравенство $2 \lg x > 1$.

3. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) производная функции на промежутках $(-1; 1)$ и $(1; 3)$ принимает положительные значения, а на промежутке $(3; 6)$ — отрицательные значения;

г) нули производной функции: 1 и 3.

5. Найдите производную функции $f(x) = 2x^2 + \sin x$.

Вариант 55

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg(2x^2 + 9x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$1 < 10^{x+1} \leq 1\,000\,000.$$

3. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) производная функции на интервалах $(-3; -1)$ и $(-1; 3)$ положительна, а на интервале $(3; 5)$ — отрицательна;

г) -1 — единственный нуль производной функции.

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 6 \sin x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$.

Вариант 56

1. Вычислите $12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$2 \lg 0,5 + \lg x > \lg 5.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(-x) = \sin \frac{\pi}{2}.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

- а) область определения функции есть промежуток $[-5; 3]$;
- б) значения функции составляют промежуток $[-4; 2]$;
- в) производная функции на интервалах $(-5; -3)$ и $(-3; 0)$ отрицательна, а на интервале $(0; 3)$ — положительна;
- г) -3 — единственный нуль производной функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную, равную

$$x^2 - 4x.$$

Вариант 57

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-5)(3x-1)}{9-x} > 0.$$

2. Решите уравнение $9^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}$.

3. Найдите $\sin x$, если $\cos x = 0,6$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

- а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
- б) значения функции составляют промежуток $[-1; 4]$;
- в) функция возрастает на промежутке $[-1; 1]$, убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[1; 3]$;
- г) нули функции: -1 и 2 .

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 6 \sin x + \operatorname{tg} x \text{ при } x = -\frac{\pi}{6}.$$

Вариант 58

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 + 4x}{9 - x} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,25} (3x - 5) > -3.$$

3. Решите уравнение

$$2 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 26). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 1 + 8x - x^2$ на промежутке $[2; 5]$.

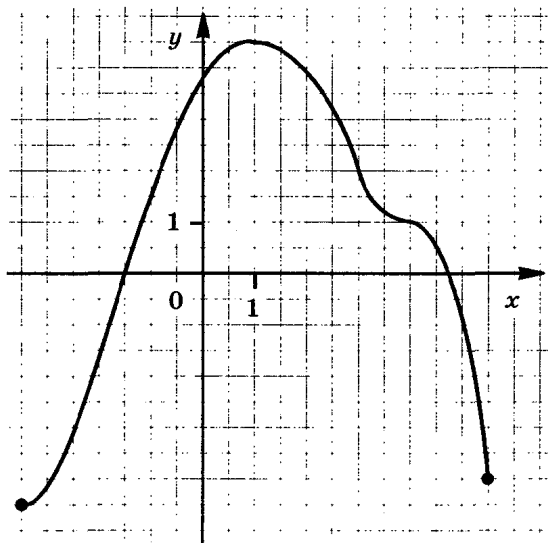


Рис. 26

Вариант 59

1. Решите неравенство

$$\frac{9 - 25x^2}{x + 4} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 27). Укажите:

- область определения функции;
 - при каких значениях x $f(x) > 0$;
 - промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;
 - наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ на промежутке $[1; 4]$.

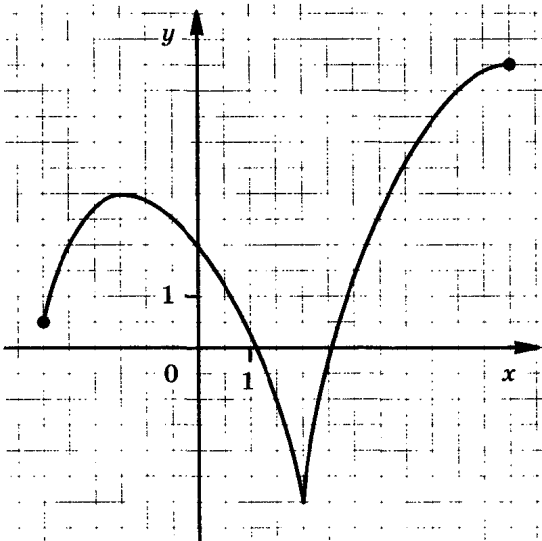


Рис. 27

Вариант 60

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{6 + 3x} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_5(1 - 3x) \leq 2.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 28). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) > 0$;
- промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;
- координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2.$$

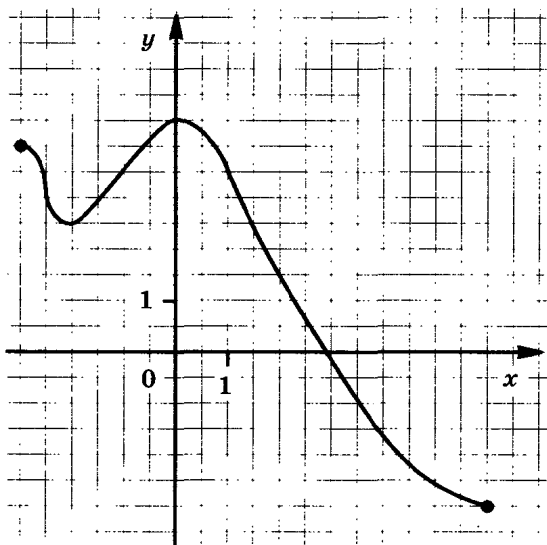


Рис. 28

Вариант 61

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{5 - 4x}{12x + 1}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 29).

Укажите:

- область определения функции;
 - при каких значениях x $f(x) > 0$;
 - промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;
 - точки экстремума функции;
 - наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^5 + 2x.$$

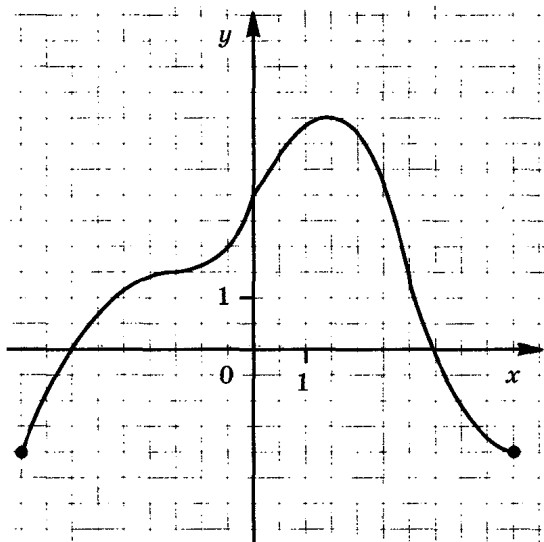


Рис. 29

Вариант 62

1. Вычислите $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{6}}}$.

2. Решите неравенство

$$\lg 2x < 2 \lg 7 + 1.$$

3. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 30). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq -2$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. К функции $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Являются ли эти касательные параллельными прямыми?

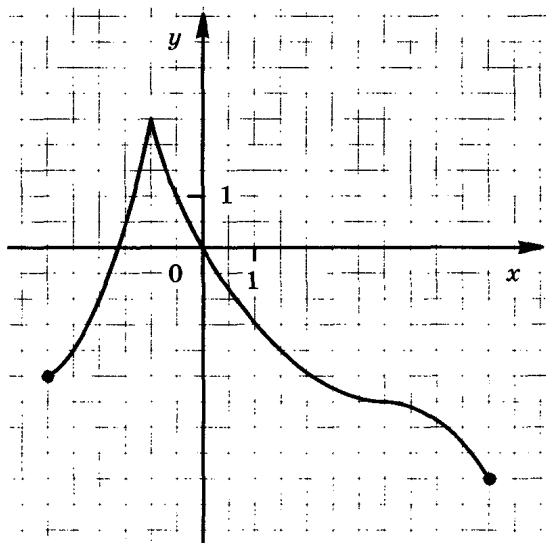


Рис. 30

Вариант 63

1. Вычислите $3^{2\log_9 12}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0,04 \leq 5^{2-x} \leq 25.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 31).

Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq -2,5$;

в) промежутки, на которых производная $f'(x)$ принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите функции, имеющие производную

$$y = 3x + x^2.$$

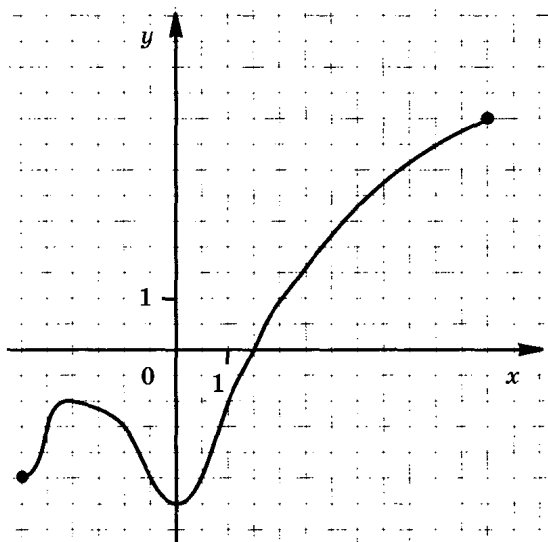


Рис. 31

Вариант 64

1. Решите неравенство

$$x^3 + 9x^2 + 14x < 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \lg 0,64 + \lg x > \lg 5.$$

3. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 32). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) < -1$;
- промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;
- координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную

$$y = x^2 - 3x.$$

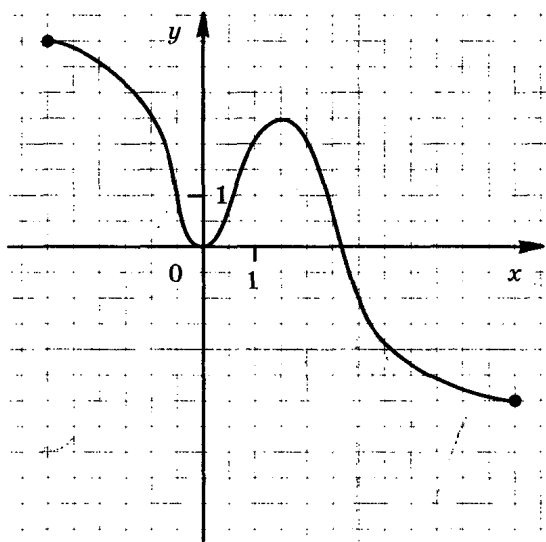


Рис. 32

Вариант 65

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-6)(4x+7)}{9-x} \leq 0.$$

2. Решите уравнение $2^{7-5x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} = 0$.

3. Найдите корни уравнения $3 \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 33). Укажите:

- область определения функции;
 - при каких значениях x $f(x) > 2$;
 - промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;
 - наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Дана функция $f(x) = 3 + 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -7 .

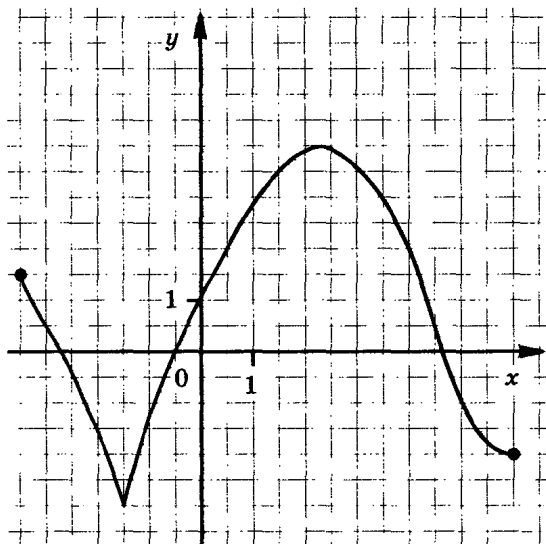


Рис. 33

Вариант 66

1. Вычислите $\frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}}$.

2. Решите неравенство $\log_2(1 - 2x) > 0$.

3. Найдите все решения уравнения $\sin x + 0,5 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 3]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-3; 0)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + x^2$, график которой проходит через точку $(0; 3)$.

Вариант 67

1. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x + 4} < 0$.

2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \geq -2$.

3. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Найдите производную функции $f(x) = x^3 \ln x$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 9$ и прямой $x = 2$.

Вариант 68

1. Решите неравенство $\frac{3x^2 - 12}{1 - 11x} > 0$.
2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} = 36^{x-1}$.
3. Решите уравнение $\sin x + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$.
4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
 - в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-3; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-5; -3)$ и $(-1; 2)$, $f'(x) = 0$ при $x = -3$;
 - г) нули функции: $x = -4$ и $x = -1$.
5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 2x + x^3$.

Вариант 69

1. Вычислите $\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{4}{4}}}$ при $b = 2, c = 5$.
2. Решите неравенство $\lg(3 - 2x) < 2$.
3. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-2; 4]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
 - в) $f'(x)$ положительна на $(-2; 0)$ и на $(3; 4)$, отрицательна на $(0; 3)$, равна нулю при $x = 0$ и при $x = 3$;
 - г) нули функции: -1 и 2 .
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x) = x^2 + 8x + 16$ и прямой $x = -2$.

Вариант 70

1. Вычислите $\left(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2\right)^{\frac{5}{6}}$.

2. Решите неравенство $\lg x + 0,5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$.

3. Решите уравнение $\sin(-x) = \sin 2\pi$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-5; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 5]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-1; 2)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-5; -1)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: -1 и 3 .

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 5$, график которой проходит через точку $(2; 10)$.

Вариант 71

1. Вычислите $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} : 2^{\frac{4}{3}}$.

2. Решите неравенство $\log_6(5x - 2) > 3 \log_6 2 + 2$.

3. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin \frac{\pi}{4}$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 2]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(3; 5)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-2; 0)$ и $(0; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$;

г) нули функции: $x = 0$ и $x = 4$.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 3,$$

которая принимает положительное значение при $x = -1$.

Вариант 72

1. Вычислите $8^{\frac{1}{3}\log_2 6}$.
2. Найдите все целые решения неравенства $\frac{1}{7} \leq 7^{x-3} < 49$.
3. Найдите решения уравнения $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-3; 3]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
 - в) $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $(-3; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;
 - г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.
5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^5 - x^2$.

Вариант 73

1. Решите неравенство $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x - 3} < 0$.
2. Решите уравнение $\log_2(7x - 4) = 2 + \log_2 13$.
3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = -0,8$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.
4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
 - а) область определения функции есть промежуток $[-4; 4]$;
 - б) значения функции составляют промежуток $[-3; 5]$;
 - в) функция убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[2; 4]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$;
 - г) нули функции: -2 и 2 .
5. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 74

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 3 - \log_2 (2 - 3x) = 2 - \log_2 (4 - 3x).$$

3. Решите уравнение $3 \operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) все значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;

г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 3x^4 - 1$.

Вариант 75

1. Решите неравенство

$$\frac{(x - 11)(3x - 8)}{6 - x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x+3} + 2^{x+1} - 7 \cdot 2^x = 48.$$

3. Найдите $\sin x$, если $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2 \ln x$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 10$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.

Вариант 76

1. Решите неравенство

$$\frac{3x + 12x^2}{x + 4} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(12 - 5x) = 2.$$

3. Докажите тождество $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 34).
Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) \geq 1$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- при каких значениях x $f'(x) = 0$;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6.$$

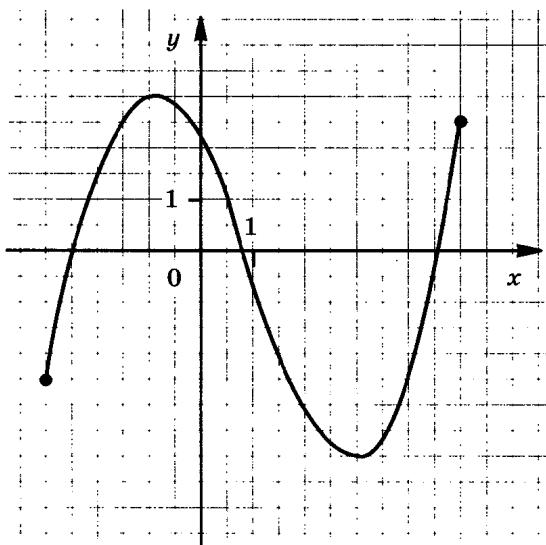


Рис. 34

Вариант 77

1. Решите неравенство

$$\frac{(x+5)(x-6)}{6x-1} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$243 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3x-2} = 27^{x+3}.$$

3. Найдите корни уравнения $2\cos x = -1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 35). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq 2,5$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 5 - 8x - x^2$ на промежутке $[-6; -3]$.

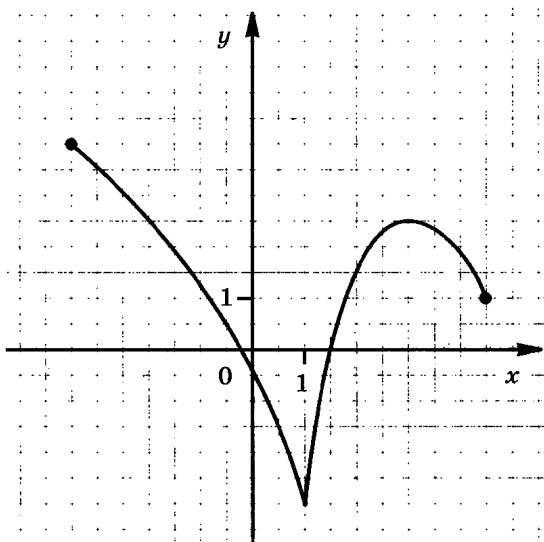


Рис. 35

Вариант 78

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 25}{6x + 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$16 \cdot 8^{2+3x} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(3\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 36). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $1 \leq f(x) \leq 2,5$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- при каких значениях x $f'(x) = 0$;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

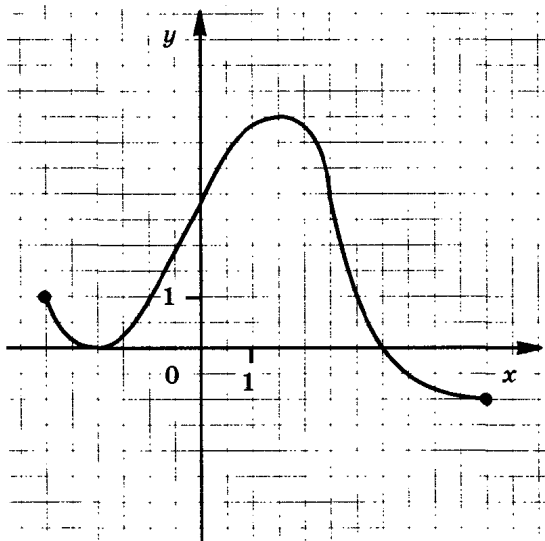


Рис. 36

Вариант 79

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 14x + 48}{x + 7} > 0.$$

2. Решите уравнение $\log_3(4 - 2x) - \log_3 2 = 2$.

3. Найдите корни уравнения $\sin^2 x - \cos x = 1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 37). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 12t - 3t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

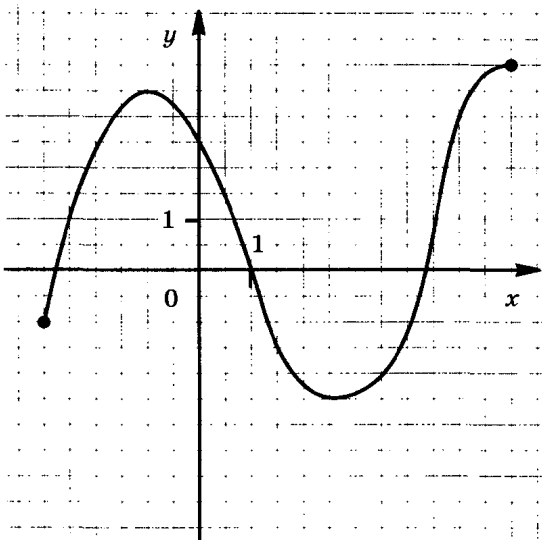


Рис. 37

Вариант 80

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{3x + 1}{x - 4}.$$

2. Решите неравенство $10^{3x+1} > 0,001$.

3. Найдите все решения уравнения $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 38). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от него до некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 1 + 4t - t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

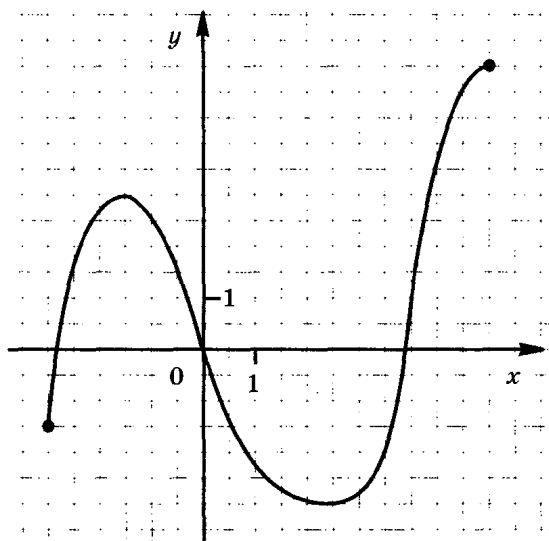


Рис. 38

Вариант 81

1. Вычислите $\left(27^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2x + 1) > -2.$$

3. Докажите тождество $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 39). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 3.

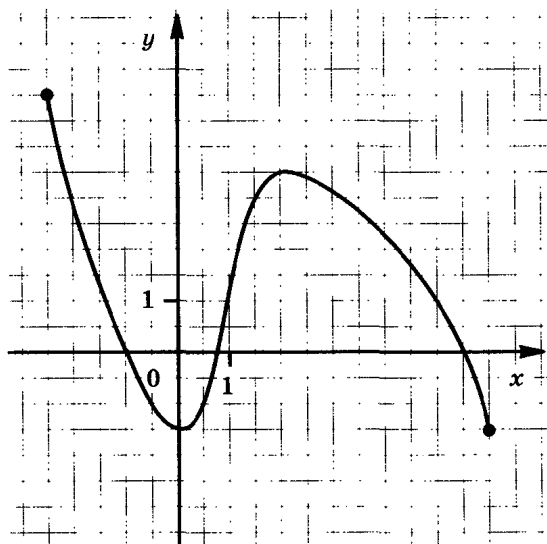


Рис. 39

Вариант 82

1. Вычислите $7^{-2\log_7 5}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{8} < 2^{x-1} \leq 16.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin x - \sin^2 x = \cos^2 x.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 40). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geq 3$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 1 - 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 1.

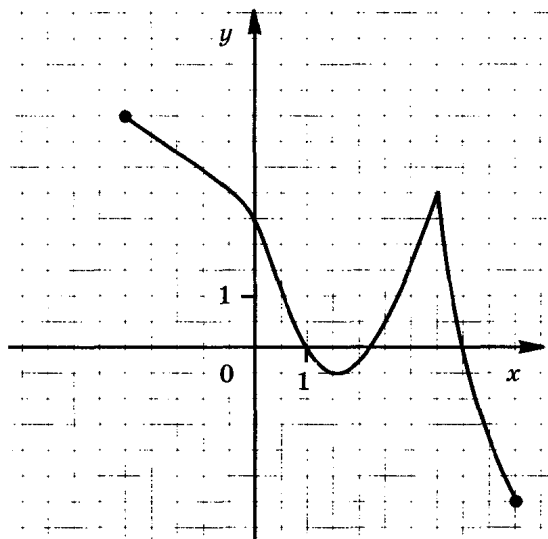


Рис. 40

Вариант 83

1. Вычислите $\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}}$ при $a = 4$.

2. Решите неравенство

$$\log_3(5x - 6) < \log_3 2 + 3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 41).
Укажите:

- а) область определения функции;
 - б) при каких значениях x $f(x) < -1$;
 - в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
 - г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;
 - д) наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Найдите производную функции

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

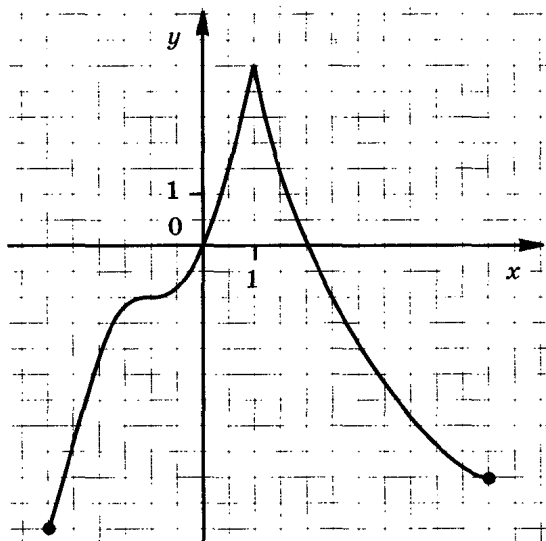


Рис. 41

Вариант 84

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-9)}{4x-5} \geq 0.$$

2. Решите уравнение $2 \cdot 5^{x+2} - 10 \cdot 5^x = 8$.

3. Решите уравнение $2 \cos(\pi + 2x) = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 42). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq -1$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 4 + 3t - 0,5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

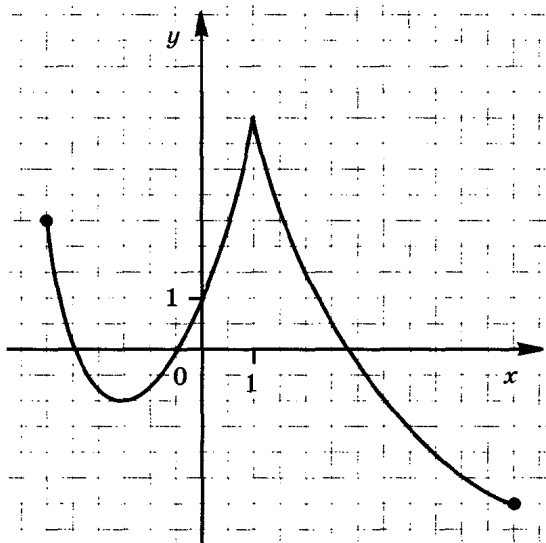


Рис. 42

Вариант 85

1. Решите неравенство

$$\frac{9x^2 - 1}{x - 6} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$25^{1-3x} = \frac{1}{125}.$$

3. Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 43). Укажите:

- область определения функции;
- при каких значениях x $f(x) \geq 3,5$;
- при каких значениях x $f'(x) = 0$;
- промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
- наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 4 - x^2$, график которой проходит через точку $(-3; 10)$.

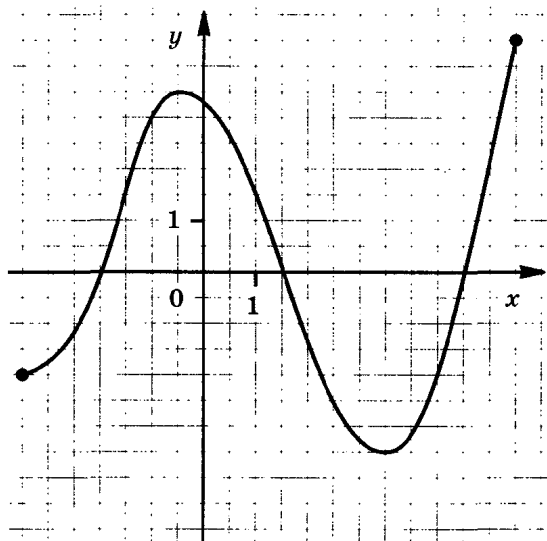


Рис. 43

Вариант 86

1. Вычислите $a^{\frac{7}{3}} + a^{\frac{1}{3}}$ при $a = 2$.

2. Решите неравенство

$$\log_7(2x - 1) < 2.$$

3. Решите уравнение $\cos(\pi + x) = \sin \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

- а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
- б) значения функции составляют промежуток $[-3; 2]$;
- в) функция возрастает на промежутках $[-4; -2]$ и $[-1; 3]$, убывает на промежутке $[-2; -1]$;
- г) значения функции отрицательны только в точках промежутков $[-4; -2]$ и $(-2; 1)$.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0,5t^2 + 3t + 2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 15 м/с?

Вариант 87

1. Вычислите $16^{0,5 \log_4 10}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0,5 < 2^{1-x} \leq 32.$$

3. Решите уравнение $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$ в его точке с абсциссой $x = -1$.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = -x^3 + 9x^2 + 21x.$$

Вариант 88

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{3x + 1}{1 - 3x}.$$

2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{25}\right)^{2-x} < 125^{x+1}$.

3. Докажите тождество $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;

г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + 7$, график которой проходит через точку $(-2; 4)$.

Вариант 89

1. Вычислите $\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{5}{5}} + 2a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a = 5$.

2. Решите неравенство $\lg(0,5x) < -2$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 3]$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-3; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-4; -3)$ и $(-1; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = -3$;

г) нули функции: -3 и 1 .

5. Найдите первообразную функции $f(x) = x - x^2$, график которой проходит через точку $(2; 10)$.

Вариант 90

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{x+1}{2x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$32^{2x+3} < 0,25.$$

3. Решите уравнение

$$4 \sin^2 x = 3.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 44). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-1,5 \leq f(x) \leq 4$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x) = 6(x^2 - 1), \quad g(x) = 6x^2 - 6x + 1 \quad \text{и} \quad q(x) = 6x(x - 1)$$

функция $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

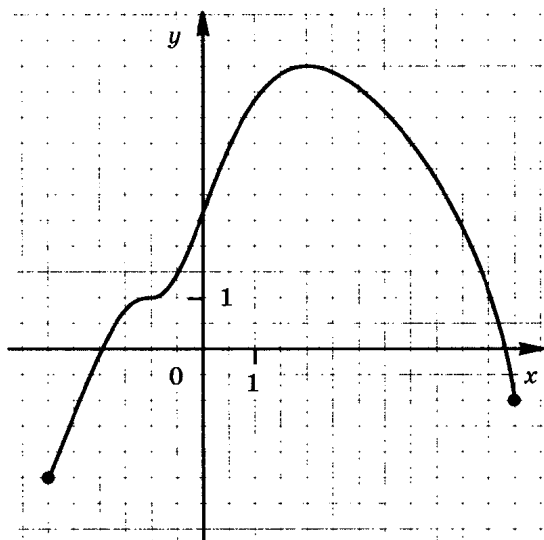


Рис. 44

Вариант 91

1. Вычислите $3^{\frac{1}{2} \log_3 4}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 x.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 45).

Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-1 \leq f(x) < 2$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. К графику функции $f(x) = 1 - 5x - x^2$ проведена касательная с угловым коэффициентом 9. Найдите координаты точки касания.

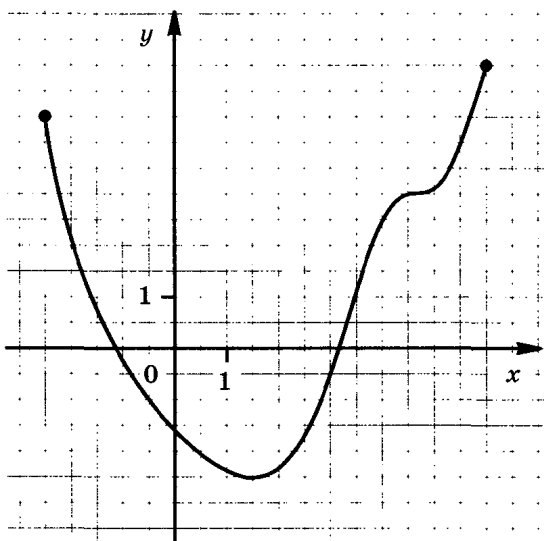


Рис. 45

Вариант 92

1. Решите неравенство

$$\frac{x(4x - 11)}{x - 7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$16^{5-3x} = 0,125^{5x-6}.$$

3. Докажите тождество

$$\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 46).
Укажите:

- область определения функции;
 - при каких значениях x $f(x) \geq 4$;
 - промежутки, на которых производная $f'(x)$ принимает положительные, отрицательные значения;
 - точки экстремума функции;
 - наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3 \ln x$ при $x = 4$.

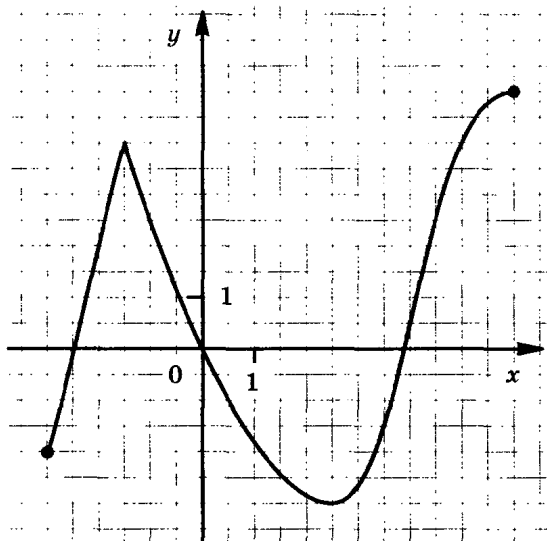


Рис. 46

Вариант 93

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 19x + 84}{2(x - 5)} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\lg(5x + 2) = \frac{1}{2} \lg 36 + \lg 2.$$

3. Докажите тождество $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 47). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leq -2$;

в) координаты точек, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и

графиком функции $f(x) = -x^2 + 5x$.

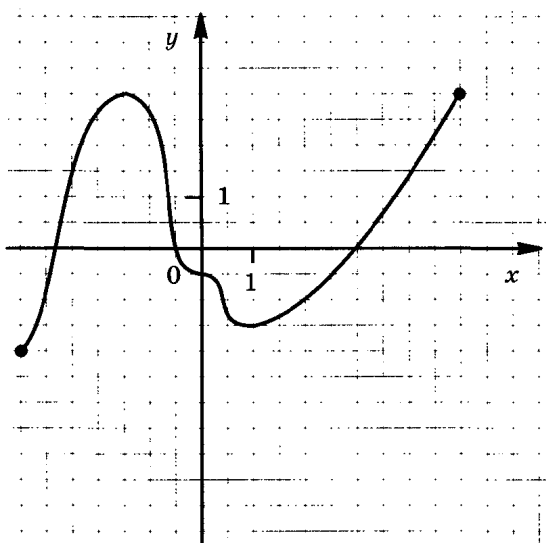


Рис. 47

Вариант 94

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{4 - 5x}{x - 3}.$$

2. Решите неравенство

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 48).

Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную

$$y' = 2x - x^2.$$

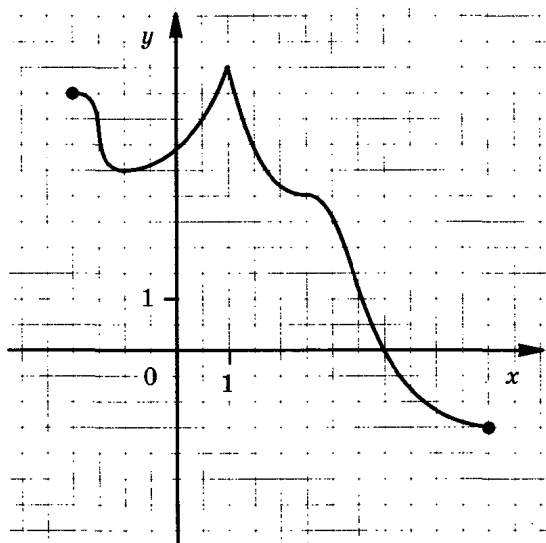


Рис. 48

Вариант 95

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg(x^2 - 8x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$6 \leq 6^{1-x} < 216.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - 0,25 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 49).

Укажите:

- область определения функции;
 - при каких значениях x $f(x) < 0$;
 - промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;
 - точки экстремума функции;
 - наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Какие из данных функций возрастают на всей области определения:

$$y = 6x, y = -3x + 1, y = -3x^2, y = x^3 + x?$$

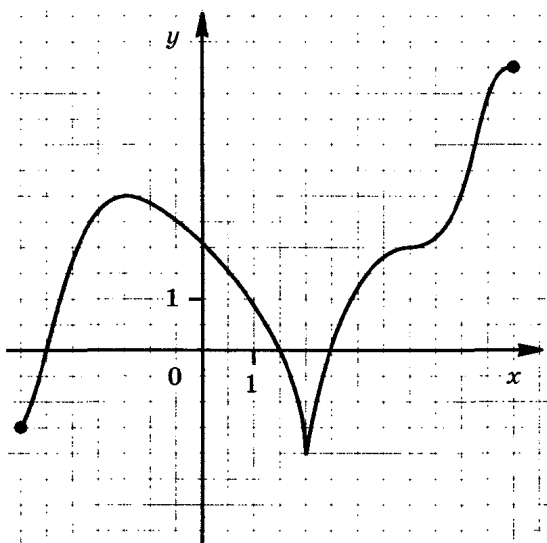


Рис. 49

Вариант 96

1. Решите неравенство

$$\frac{7x + x^2}{12x - 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) - \log_{\frac{1}{2}}16 = 5.$$

3. Доказать тождество $\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 2]$;

в) функция убывает на промежутках $[-3; -1]$ и $[2; 4]$,
возрастает на промежутке $[-1; 2]$;

г) нули функции: -1 и 3 .

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0,5t^2 - 3t + 8 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите минимальное расстояние, на которое тело приблизится к точке A .

2

Задания 6, 7 для экзамена «Математика»

Вариант 1

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4 и 5, расположенных на стержнях SA , SB и SC , которые не принадлежат одной плоскости (рис. 50). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.
7. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата $ABCD$, $\angle ABM = 30^\circ$. Найдите тангенс угла ACM .

Вариант 2

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на стержнях SA , SB и SC , которые не принадлежат одной плоскости (рис. 51). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.
7. Сторона квадрата равна 4 см. Точка, равноудаленная от всех вершин квадрата, находится на расстоянии 6 см от точки пересечения его диагоналей. Найдите расстояния от этой точки до вершин квадрата.

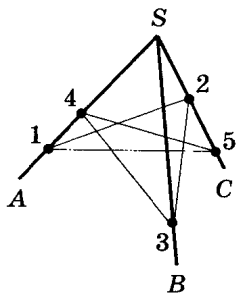


Рис. 50

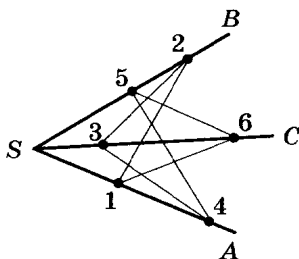


Рис. 51

Вариант 3

6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ из вершины D' проведены диагонали граней $D'A$, $D'B'$ и $D'C$. Сделайте рисунок. Как называется многогранник с вершинами D' , A , B' , C ? Имеет ли этот многогранник равные ребра? равные грани?
7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 4 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника и равен 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

Вариант 4

6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ отмечены следующие точки: K — центр грани $BCC'B'$, L — центр грани $DCC'D'$ и M — центр грани $ABCD$. Сделайте рисунок. Как называется многогранник $SKLM$? Имеет ли этот многогранник равные ребра? равные грани?
7. Радиус основания цилиндра равен 4 см, площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объем цилиндра.

Вариант 5

6. Точки пересечения высот всех граней правильной треугольной пирамиды являются вершинами некоторого многогранника. Как называется этот многогранник? Имеет ли он равные ребра? равные грани?
7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A . Точка C делит его в отношении $2:1$, считая от точки A . Через точки C и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1 . Длина отрезка AC_1 равна 12 см. Найдите длину отрезка AB_1 .

Вариант 6

6. Вершинами некоторого многогранника являются центр верхней грани куба и середины всех сторон нижней его грани. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и обозначьте равные ребра многогранника; укажите, какие грани этого многогранника равны между собой.
7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 6 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника; расстояние от точки M до прямой AB равно 5 см. Найдите длину отрезка CM .

Вариант 7

6. Плоскости α и β , изображенные на рисунке 52, пересекаются по прямой MN . Точка A лежит в плоскости α , а точка B — в плоскости β . Определите, каково взаимное расположение прямых AM и BN .
7. Основание прямой призмы — равнобокая трапеция, одно из оснований которой в два раза больше другого. Непараллельные боковые грани призмы — квадраты. Высота призмы равна 6 см. Площадь боковой поверхности призмы равна 144 см^2 . Вычислите объем призмы.

Вариант 8

6. На какие многогранники разбивает призму $ABCA'B'C'$ плоскость, проходящая через вершины A , B и C' ? Сделайте рисунок.
7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A . Через его середину C и точку B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1 . Длина отрезка AC_1 равна 8 см. Найдите длину отрезка AB_1 .

Вариант 9

6. Изображенные на рисунке 53 прямые a и b пересекают параллельные плоскости α и β соответственно в точках A, B и A', B' . Определите, каково взаимное расположение прямых a и b .
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 3 см и прилежащим углом 30° вокруг меньшего катета.

Вариант 10

6. Сечение параллелепипеда $ABCA'B'C'D'$ проведено через точки A, B и середину ребра CC' . Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.
7. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а высота боковой грани — 15 см. Найдите боковое ребро.

Вариант 11

6. Сечение параллелепипеда $ABCA'B'C'D'$ проведено через середины ребер AB, AD и $A'B'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 20 см^2 . Найдите площадь его боковой поверхности.

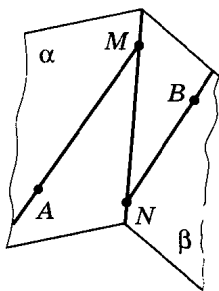


Рис. 52

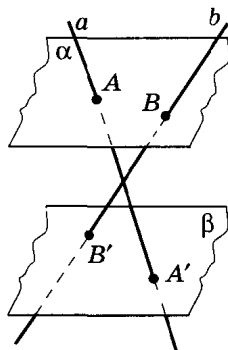


Рис. 53

Вариант 12

6. Куб $ABCD A' B' C' D'$ рассечен на два многогранника плоскостью, проходящей через середину ребра BB' перпендикулярно диагонали $A'C$. Каким многоугольником является сечение? Какие особенности имеет этот многоугольник?
7. Середина C отрезка AB принадлежит плоскости α . Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 . Длина отрезка A_1C равна 8 см. Найдите длину отрезка A_1B_1 .

Вариант 13

6. Изображенные на рисунке 54 прямые a и b пересекают параллельные плоскости α и β соответственно в точках A, B и A', B' . Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых a и b .
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 6 см и гипотенузой 10 см вокруг большего катета.

Вариант 14

6. Куб рассечен плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон нижнего основания и центр верхнего основания. Как называется многоугольник, полученный в сечении? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 8 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника и равен 3 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

Вариант 15

6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ проведено сечение через середины ребер AA' и CC' и вершину B . Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.
7. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы треугольника и равна гипотенузе. Найдите боковые ребра пирамиды.

Вариант 16

6. Изображенные на рисунке 55 плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α , а отрезок CD — в плоскости β . Определите, каково взаимное расположение прямых AC и BD .
7. Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей и развернуть на плоскости, то получится круговой сектор с радиусом 4 см и центральным углом 120° . Найдите объем этого конуса.

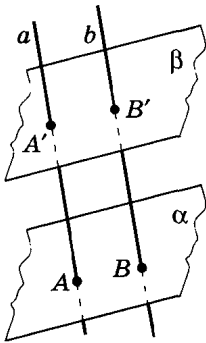


Рис. 54

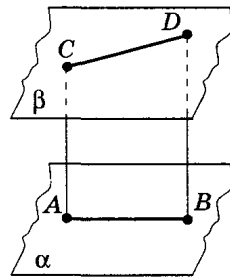


Рис. 55

Вариант 17

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на четырех попарно параллельных стержнях a , b , c и d , никакие три из которых не принадлежат одной и той же плоскости (рис. 56). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.
7. Плоскость проходит на расстоянии 8 см от центра шара. Радиус сечения равен 15 см. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант 18

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 57). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.
7. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите объем цилиндра.

Вариант 19

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 58). Скопируйте рисунок, отметьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.
7. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 3 см и противолежащим углом 30° вокруг большего катета.

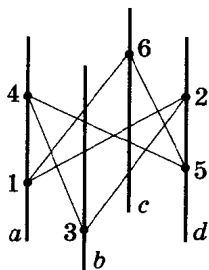


Рис. 56

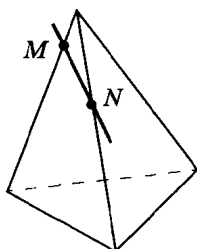


Рис. 57

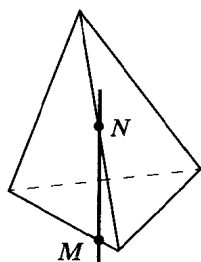


Рис. 58

Вариант 20

6. Продолжение отрезка BC , изображенного на рисунке 59, пересекает плоскость α в точке E . Отрезок AD лежит в плоскости α . Скопируйте рисунок и изобразите отрезки AC и BD . Определите, пересекаются ли эти отрезки.
7. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45° . Объем призмы равен 108 см^3 . Найдите площадь полной поверхности призмы.

Вариант 21

6. Отрезки AB и CD , изображенные на рисунке 60, лежат в двух пересекающихся плоскостях α и β . Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых AD и BC .
7. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов — 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию.

Вариант 22

6. На какие многогранники разбивается параллелепипед $ABCA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через вершины A , B' и D ? Какие особенности имеют эти многогранники? Сделайте рисунок.
7. Сторона квадрата равна 4 см. Точка, не принадлежащая плоскости квадрата, удалена от каждой из его вершин на расстояние 6 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости квадрата.

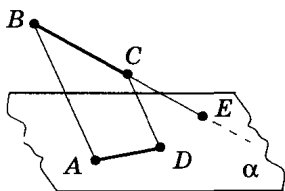


Рис. 59

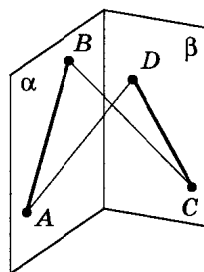


Рис. 60

Вариант 23

6. Изображенные на рисунке 61 плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α , а отрезок CD в плоскости β . Определите, каково взаимное расположение прямых AD и BC .
7. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 13 см. Найдите объем пирамиды.

Вариант 24

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на параллельных стержнях a , b и c , не принадлежащих одной и той же плоскости (рис. 62). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.
7. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Высота пирамиды опущена в точку пересечения его диагоналей. Меньшие боковые ребра пирамиды равны 5 см. Найдите объем пирамиды.

Вариант 25

6. В кубе проведено сечение через середины двух смежных сторон верхнего основания и центр нижнего. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Объем шара равен 36π см³. Найдите площадь поверхности шара.

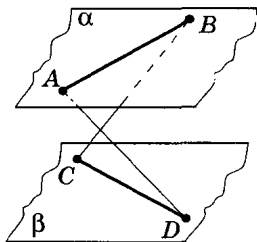


Рис. 61

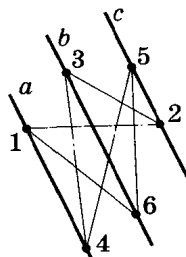


Рис. 62

Вариант 26

6. Сечение правильной треугольной призмы проходит через центры оснований и одну из вершин. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Три смежных ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны 6 см, 6 см и 8 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 27

6. Точки K , L , M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 63 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, имеют ли отрезки KN и LM общую точку.
7. Сумма площадей поверхностей двух шаров радиуса 4 см равна площади поверхности некоторого большего шара. Каков объем этого большего шара?

Вариант 28

6. Точки K , L , M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 64 прямой призмы. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых KM и LN .
7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг его оси симметрии, параллельной большей стороне.

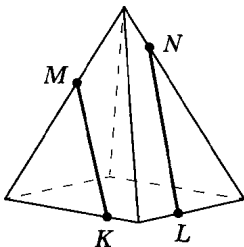


Рис. 63

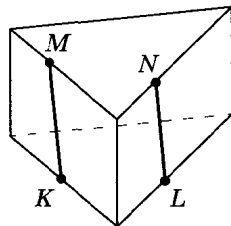


Рис. 64

Вариант 29

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 65). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.
7. Образующая конуса равна 12 см и составляет с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем конуса.

Вариант 30

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 66). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.
7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 8 см вокруг его оси симметрии.

Вариант 31

6. Вершинами многогранника являются середины сторон основания и середина высоты правильной четырехугольной пирамиды. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.
7. Площадь боковой поверхности конуса равна 20π см², а площадь его основания на 4π см² меньше. Найдите объем конуса.

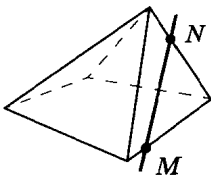


Рис. 65

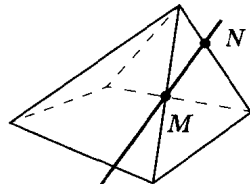


Рис. 66

Вариант 32

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 67). Скопируйте рисунок, отметьте и постройте точку, в которой прямая MN пересекает плоскость основания пирамиды.
7. Объем конуса с радиусом основания 6 см равен 96π см³. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Вариант 33

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 68). Скопируйте рисунок, отметьте и постройте точки, в которой прямая MN пересекает прямые, содержащие ребра пирамиды.
7. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке C , которая делит его в отношении $3 : 1$, считая от точки A . Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 . Длина отрезка A_1C равна 15 см. Найдите длину отрезка A_1B_1 .

Вариант 34

6. Точки K , L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 69 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре CD так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.
7. Высота конуса равна 12 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120° . Найдите площадь полной поверхности конуса.

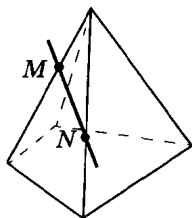


Рис. 67

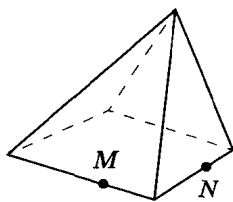


Рис. 68

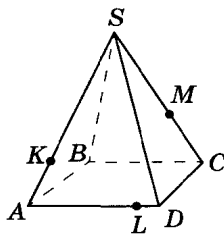


Рис. 69

Вариант 35

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 70). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.
7. Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см в первый раз вращается вокруг большего катета, а во второй — вокруг меньшего. Сравните площади боковых поверхностей получающихся при этом конусов.

Вариант 36

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 71). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.
7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 37

6. Куб $ABCD A' B' C' D'$ рассечен на два многогранника плоскостью, проходящей через середину ребра BB' перпендикулярно диагонали BD' . Каким многоугольником является сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Радиус основания цилиндра равен 8 см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите объем цилиндра.

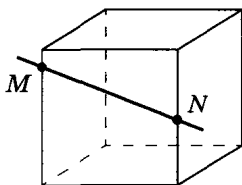


Рис. 70

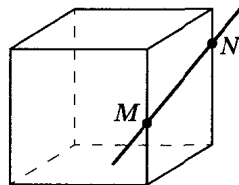


Рис. 71

Вариант 38

6. Точки K , L , M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 72 пирамиды, причем K и L — середины ребер. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN , отрезки KN и LM .
7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 108 см^2 , а его образующая в три раза меньше диаметра основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 39

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 73). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.
7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг большего катета.

Вариант 40

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 74). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.
7. Радиус основания цилиндра равен 6 см, высота в два раза меньше длины окружности основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

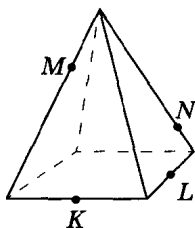


Рис. 72

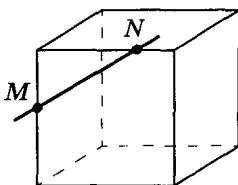


Рис. 73

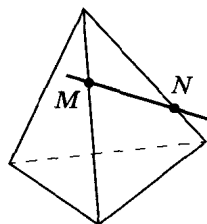


Рис. 74

Вариант 41

6. Точки K и L — вершины куба, изображенного на рисунке 75, точки M и N — середины его ребер. Определите, пересекаются ли отрезки KN и LM .
7. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.

Вариант 42

6. Точки K , L , M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 76 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN , отрезки KN и LM .
7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 2 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD .

Вариант 43

6. Точки пересечения диагоналей всех граней правильной четырехугольной призмы являются вершинами некоторого многогранника. Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.
7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A . Точка C делит отрезок AB в отношении 3 : 2, считая от точки A . Через точки C и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1 . Длина отрезка AB_1 равна 15 см. Найдите длину отрезка AC_1 .

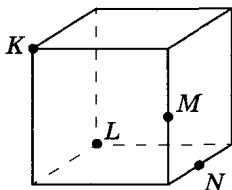


Рис. 75

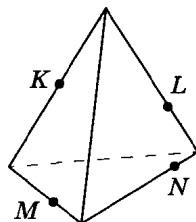


Рис. 76

Вариант 44

6. На рисунке 77 изображены пересекающиеся плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , а точка C лежит в плоскости β . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.
7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 6 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника, $\angle MCA = 60^\circ$. Найдите длину отрезка MB .

Вариант 45

6. На рисунке 78 изображены пересекающиеся плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , а точка C лежит в плоскости β . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.
7. Через концы отрезка AB , не пересекающего плоскость α , проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 ; $AA_1 = 5$ см, $B_1B = 8$ см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины отрезков AB и A_1B_1 .

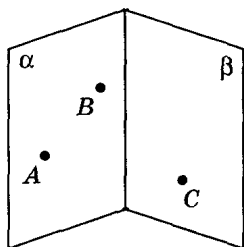


Рис. 77

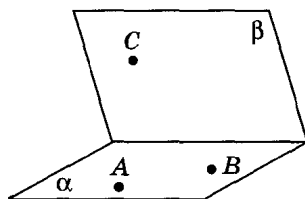


Рис. 78

Вариант 46

6. На рисунке 79 изображены пересекающиеся плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , а точка C лежит в плоскости β . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы отрезки AD и BC оказались пересекающимися.
7. Из точки O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ к его плоскости восстановлен перпендикуляр OM так, что $\angle OBM = 60^\circ$. Найдите косинус угла ABM .

Вариант 47

6. На рисунке 80 изображены пересекающиеся плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , а точка C лежит в плоскости β . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы отрезки AC и BD оказались пересекающимися.
7. Диагональ квадрата равна 6 см. Точка, равноудаленная от всех сторон квадрата, находится на расстоянии 5 см от точки пересечения его диагоналей. Найдите расстояние от этой точки до стороны квадрата.

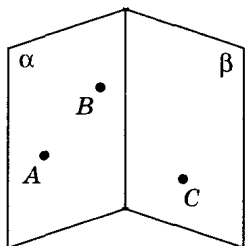


Рис. 79

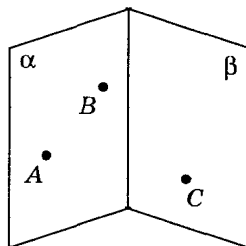


Рис. 80

Вариант 48

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4 и 5, расположенных на параллельных стержнях a , b и c , не принадлежащих одной и той же плоскости (рис. 81). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых нити соприкасаются.
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг большей стороны.

Вариант 49

6. На рисунке 82 изображены параллельные плоскости α и β . Точка A принадлежит плоскости α , точки C и D лежат в плоскости β , а точка M принадлежит прямой AC . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку B , принадлежащую плоскости α , так, чтобы прямые AC и BD пересекались в точке M .
7. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Высота пирамиды, равная 12 см, делит гипотенузу этого треугольника пополам. Найдите боковые ребра пирамиды.

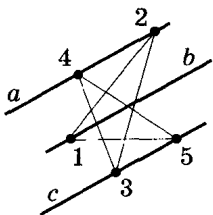


Рис. 81

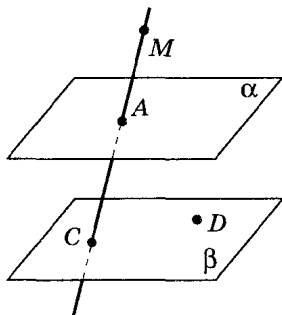


Рис. 82

Вариант 50

6. На рисунке 83 изображены параллельные плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , а точка C лежит в плоскости β . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.
7. Через концы отрезка AB , имеющего с плоскостью α общую точку, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 ; $AA_1 = 5$ см. Длина отрезка, соединяющего середины отрезков AB и A_1B_1 , равна 8 см. Найдите длину отрезка B_1B .

Вариант 51

6. На рисунке 84 изображены параллельные плоскости α и β . Точки A и B принадлежат плоскости α , точка C лежит в плоскости β , а точка M принадлежит прямой BC . Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D , принадлежащую плоскости β , так, чтобы прямые AD и BC пересекались в точке M .
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см и острым углом 30° вокруг меньшего катета.

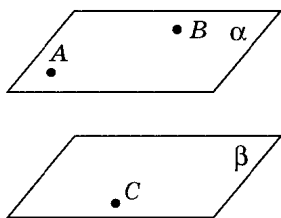


Рис. 83

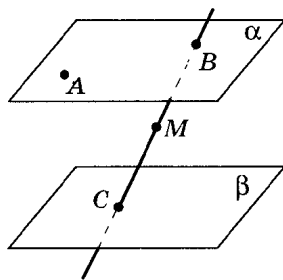


Рис. 84

Вариант 52

6. Точки A и B лежат соответственно на нижнем и верхнем основаниях цилиндра, изображенного на рисунке (рис. 85). Скопируйте рисунок и проведите отрезок AB . Определите, все ли точки отрезка AB лежат на поверхности цилиндра.
7. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 10 см, а сторона основания 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 53

6. Точки A и B расположены на видимой части боковой поверхности цилиндра (рис. 86). Скопируйте рисунок и проведите отрезок AB . Все ли точки отрезка AB принадлежат боковой поверхности цилиндра?
7. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Вершины пирамиды удалены от сторон основания на 13 см. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 54

6. Точки A и B принадлежат боковой поверхности конуса (рис. 87). Скопируйте рисунок и проведите отрезок AB . Определите, все ли точки отрезка AB лежат на поверхности конуса.
7. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$ см, $AD = 5$ см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости прямоугольника, $\angle ABM = 30^\circ$. Найдите объем многогранника $MABD$.

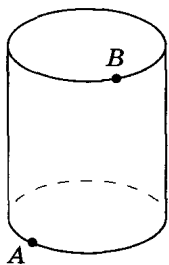


Рис. 85

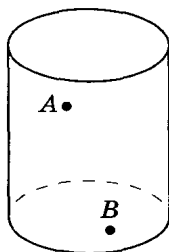


Рис. 86

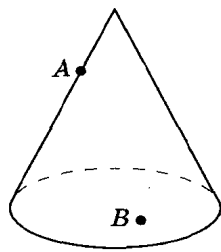


Рис. 87

Вариант 55

6. На рисунке 88 изображены отрезки AB и CD , лежащие соответственно в плоскостях α и β . Прямые AD и BC пересекаются. Определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β .
7. Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2 . Найдите его диагональ.

Вариант 56

6. На рисунке 89 изображены отрезки AB и CD , лежащие соответственно в плоскостях α и β . Прямые AD и BC пересекаются. Определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β .
7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 см^2 , стороны основания 4 см и 6 см . Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда.

Вариант 57

6. На рисунке 90 изображены отрезки AB и CD , лежащие соответственно в плоскостях α и β . Прямые AC и BD параллельны. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β .
7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 см и 5 см , бóльшая из диагоналей его боковых граней образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

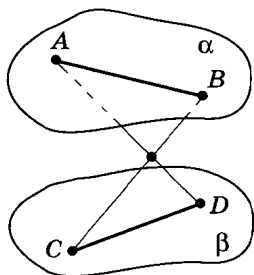


Рис. 88

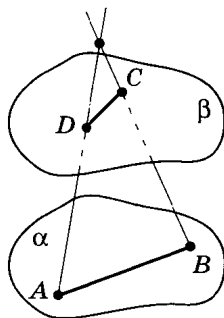


Рис. 89

Вариант 58

6. Точки K , L , M и N принадлежат соответствующим ребрам куба, изображенного на рисунке 91. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN , отрезки KN и LM .
7. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 59

6. Сечение правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ проходит через ребро AB и точку пересечения медиан основания $A'B'C'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Отрезок, соединяющий конец диаметра нижнего основания цилиндра с центром его верхнего основания, равен 2 см и наклонен к плоскости основания под углом 30° . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 60

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания и середину несмежного с ними бокового ребра. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.
7. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая конуса равна 13 см. Найдите объем конуса.

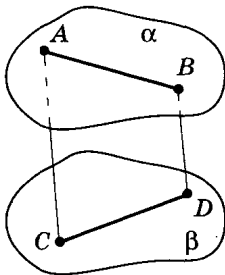


Рис. 90

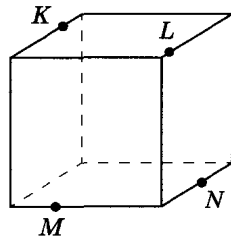


Рис. 91

Вариант 61

6. Точки K и L — вершины куба, изображенного на рисунке 92, точки M и N — середины его ребер. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN , отрезки KN и LM .
7. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке C , которая делит его в отношении $3 : 5$, считая от точки A . Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1 . Длина отрезка A_1C равна 12 см. Найдите длину отрезка A_1B_1 .

Вариант 62

6. Точки K , L , M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 93 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки KN и LM .
7. Образующая конуса равна 5 см, площадь его боковой поверхности равна 15π см². Найдите объем конуса.

Вариант 63

6. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ проведено сечение через середины ребер AB , AD и BB' . Каким многоугольником является сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Высота цилиндра равна 6 см, а площадь его боковой поверхности вдвое меньше площади его полной поверхности. Найдите объем цилиндра.

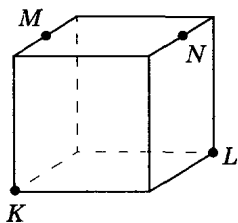


Рис. 92

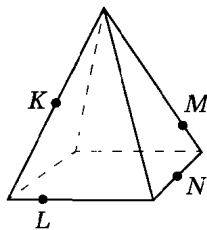


Рис. 93

Вариант 64

6. Через середины двух сторон AB и AC основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ и точку пересечения медиан грани SBC проведено сечение. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 30^\circ$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD .

Вариант 65

6. Точки K, L, M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 94 пирамиды. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN , отрезки KN и LM .
7. Найдите площадь сечения шара радиуса 41 см плоскостью, проведенной на расстоянии 29 см от центра шара.

Вариант 66

6. Точка M — середина ребра AD куба, изображенного на рисунке 95. Скопируйте рисунок и изобразите точку N , принадлежащую ребру CD , так, чтобы отрезки $A'N$ и $C'M$ имели общую точку.
7. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.

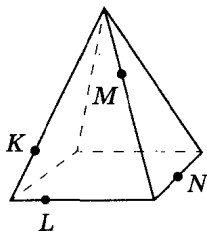


Рис. 94

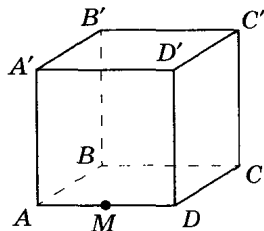


Рис. 95

Вариант 67

6. Вершинами многогранника являются середины боковых ребер и центр основания правильной пирамиды. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.
7. Круговой сектор с радиусом 10 см свернут в виде боковой поверхности конуса. Высота конуса равна 8 см. Найдите центральный угол кругового сектора.

Вариант 68

6. Точки K , L и M расположены на ребрах куба $ABCA'D'B'C'D'$, изображенного на рисунке 96. Скопируйте рисунок и изобразите точку N , принадлежащую ребру CD , так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.
7. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите объем тела вращения.

Вариант 69

6. Точки K , L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 97 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре CD так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.

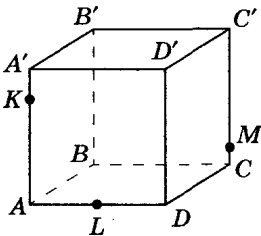


Рис. 96

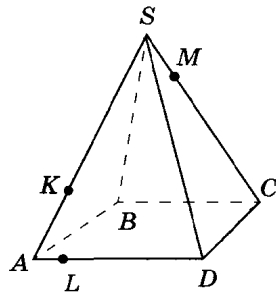


Рис. 97

Вариант 70

6. Точки K , L и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 98 пирамиды $SABC$. Скопируйте рисунок и отметьте точку M на ребре SC так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.
7. Найдите объем тела, которое получено при вращении квадрата со стороной 7 см вокруг прямой, соединяющей середины противоположных сторон.

Вариант 71

6. Точки K , L и M лежат на ребрах куба $ABCA'D'B'C'D'$, изображенного на рисунке 99. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре $C'D'$ так, чтобы отрезки KN и LM пересеклись.
7. Высота конуса равна 8 см, объем $24\pi \text{ см}^3$. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Вариант 72

6. Вершины некоторого многогранника являются центрами пяти граней куба. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.
7. Три одинаковых металлических куба с ребрами по 4 см сплавлены в один куб. Определите площадь поверхности этого куба.

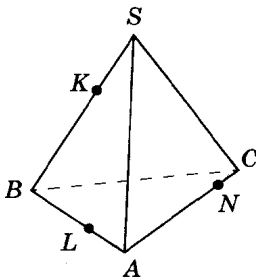


Рис. 98

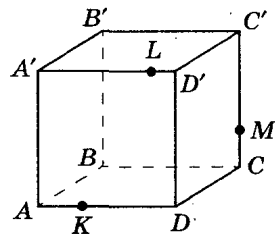


Рис. 99

Вариант 73

6. Точки K , L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 100 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре SC так, чтобы отрезки KN и LM пересеклись.
7. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол в 30° , а радиус основания конуса равен 6 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Вариант 74

6. Точки K , L , M и N лежат на ребрах куба (рис. 101). Скопируйте рисунок и определите, существует ли точка пересечения отрезков KN и ML .
7. Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 17 см, а один из катетов равен 8 см, вращается вокруг своего большего катета. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант 75

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через диагональ основания параллельно непересекающемуся с ней боковому ребру. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Высота конуса равна 12 см, а его образующая равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

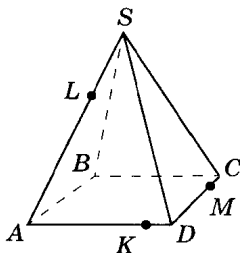


Рис. 100

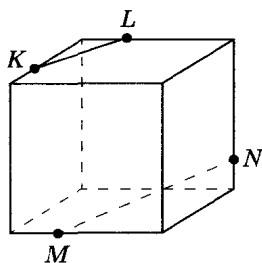


Рис. 101

Вариант 76

6. Точки K и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 102 пирамиды, а точки L и M принадлежат соответственно ее граням CSD и ASD . Скопируйте рисунок, изобразите отрезки KL и MN и определите, имеют ли они общую точку.
7. Два металлических куба с ребрами 1 см и 2 см соответственно сплавлены в один куб. Определите ребро этого куба.

Вариант 77

6. Точки K , L , M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 103 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых KL и MN .
7. Два металлических куба с ребрами 1 см и 2 см сплавлены в один куб. Определите полную поверхность этого куба.

Вариант 78

6. Правильная треугольная пирамида рассечена на два многогранника плоскостью, проходящей через сторону основания и середину высоты пирамиды. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120° . Найдите объем конуса.

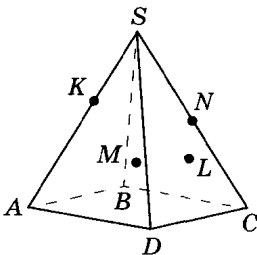


Рис. 102

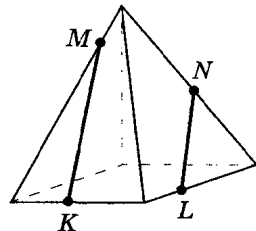


Рис. 103

Вариант 79

6. Точки K , L , M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 104 призмы. Скопируйте рисунок и определите, имеют ли отрезки KN и ML общую точку.
7. К плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC = 6$ см и углом 120° при вершине проведен перпендикуляр AM . Расстояние от точки M до BC равно 12 см. Найдите косинус линейного угла двугранного угла, образованного плоскостями треугольников ABC и MBC .

Вариант 80

6. Точки K , L и M лежат на ребрах изображенной на рисунке 105 призмы. Скопируйте рисунок и отметьте на ребре AC точку N так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.
7. Найдите объем тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 6 см вокруг его оси симметрии.

Вариант 81

6. Точка A принадлежит основанию конуса, изображенного на рисунке 106, а точка B — оси SO этого конуса. Скопируйте рисунок и отметьте точку C , в которой прямая AB пересекает боковую поверхность конуса.
7. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3 , площадь основания 12 см^2 . Одна сторона основания в три раза больше другой. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

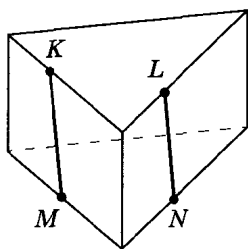


Рис. 104

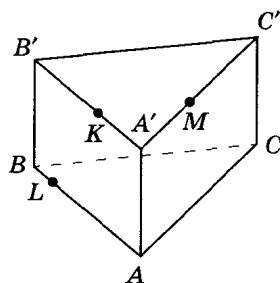


Рис. 105

Вариант 82

6. Правильная четырехугольная пирамида рассечена на два многогранника плоскостью, проходящей через сторону основания и медиану боковой грани. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 64 см^2 , а его образующая равна диаметру основания. Найдите объем цилиндра.

Вариант 83

6. Точка A принадлежит основанию конуса, изображенного на рисунке 107, а точка B — оси SO этого конуса. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи конуса, расположена точка C прямой AB .
7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 см^2 , стороны основания 4 см и 6 см . Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Вариант 84

6. На какие многогранники разбивает прямую призму $ABCA'B'C'$ плоскость, проходящая через вершины A , B и C' ? Сделайте рисунок.
7. Шар с центром в точке O касается плоскости в точке A . Точка B лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если $AB = 21 \text{ см}$, $BO = 29 \text{ см}$.

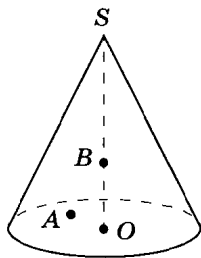


Рис. 106

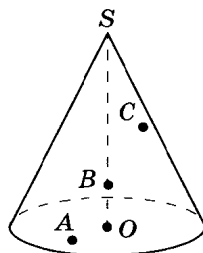


Рис. 107

Вариант 85

6. Точка A принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 108, а точка B — оси OO' этого цилиндра. Скопируйте рисунок и отметьте точку C , в которой прямая AB пересекает боковую поверхность цилиндра.
7. Полуокруг свернут в виде боковой поверхности конуса. Радиус основания конуса равен 5 см. Найдите объем конуса.

Вариант 86

6. Точка A принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 109, а точка B — оси OO' этого цилиндра. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи цилиндра, расположена точка C прямой AB .
7. Диагональ квадрата $ABCD$ равна 10 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD .

Вариант 87

6. В кубе $ABCA'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер AB и AD и вершину C' . Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 7 см, вокруг большего катета.

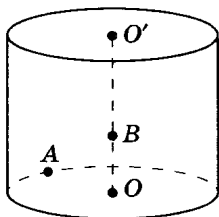


Рис. 108

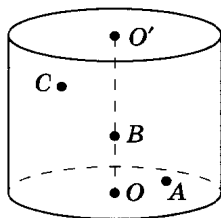


Рис. 109

Вариант 88

6. Точки A , B , C и D лежат на ребрах изображенного на рисунке 110 куба. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки AC и BD .
7. Ромб со стороной 5 см и углом 60° вращается вокруг своей меньшей диагонали. Определите объем тела вращения.

Вариант 89

6. В основании пирамиды $SABCD$, изображенной на рисунке 111, лежит прямоугольник. Точка M принадлежит ребру SB . Скопируйте рисунок и отметьте на ребре SC точку N так, чтобы отрезки AN и DM пересекались.
7. Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна 4π см². Найдите объем шара.

Вариант 90

6. Сечение правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ проходит через ребро AB и точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 30° . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

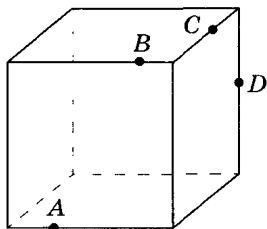


Рис. 110

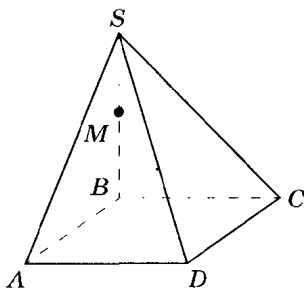


Рис. 111

Вариант 91

6. В основании пирамиды $SABCD$, изображенной на рисунке 112, лежит прямоугольник. Точка L принадлежит ребру SB , а точка K — ребру SC . Скопируйте рисунок и отметьте на ребре CD точку M так, чтобы отрезки AK и LM пересекались.
7. Образующая конуса равна 4 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Найдите объем конуса.

Вариант 92

6. Точка A принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 113, а точка B — оси OO' этого цилиндра. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи цилиндра, расположена точка C прямой AB .
7. Катеты CA и CB прямоугольного треугольника ABC равны 6 см и 8 см. Через вершину прямого угла C проходит плоскость, параллельная AB . Меньший катет треугольника образует с этой плоскостью угол в 45° . Найдите синус угла, который образует с ней другой его катет.

Вариант 93

6. Точки K , L и M — центры трех видимых граней куба, изображенного на рисунке 114. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки DL и KM .
7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, в основании которого прямоугольник со сторонами 9 см и 6 см, равна 408 см^2 . Найдите диагонали параллелепипеда.

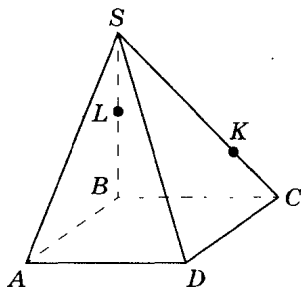


Рис. 112

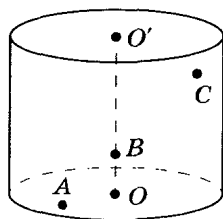


Рис. 113

Вариант 94

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.
7. Радиус основания цилиндра равен 8 см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 95

6. Точки A , B и C лежат на видимой части боковой поверхности конуса, изображенного на рисунке 115. Один из отрезков с концами в этих точках полностью принадлежит поверхности конуса. Сделайте рисунок и проведите этот отрезок.
7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

Вариант 96

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведено сечение через середины ребер AB и BC параллельно ребру SC . Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.
7. Радиус основания цилиндра равен 4 см, высота в два раза больше длины окружности основания. Найдите объем цилиндра.

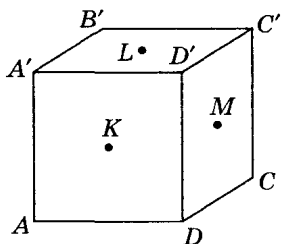


Рис. 114

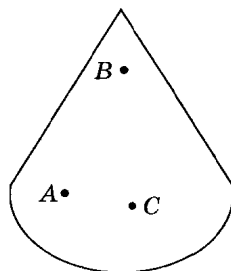


Рис. 115

Задание 8 для экзамена «Математика»

- 3.1. Диагональ меньшей боковой грани прямоугольного параллелепипеда равна большему ребру основания. Высота параллелепипеда равна 2 см, диагональ основания равна 14 см. Найдите объем параллелепипеда.
- 3.2. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 6 см. Большой катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найдите высоту призмы.
- 3.3. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12 см и углом 60° . Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.
- 3.4. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с острым углом 60° ; боковая сторона и меньшая из параллельных сторон трапеции равны 4 см; диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол 30° . Вычислите объем призмы.
- 3.5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45° , а диагональ боковой грани — угол 60° . Высота прямоугольного параллелепипеда равна 8 см. Найдите его объем.
- 3.6. В основании прямой призмы — ромб; диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы 30° и 60° ; высота призмы равна 6 см. Найдите объем призмы.
- 3.7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 10 см. Сторона основания удалена от двух параллельных ей сторон противоположащей боковой грани соответственно на 5 см и 13 см. Найдите объем призмы.
- 3.8. Ребро нижнего основания правильной четырехугольной призмы удалено от плоскости верхнего основания на 10 см. Расстояния между противоположащими боковыми ребрами равны 8 см. Найдите объем призмы.
- 3.9. В основании прямой призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней призмы равны 8 см^2 и 12 см^2 , а расстояние между ними равно 5 см. Найдите объем призмы.

- 3.10. В основании прямой призмы лежит трапеция. Объем призмы равен 40 см^3 . Площади параллельных боковых граней равны 6 см^2 и 14 см^2 . Найдите расстояние между ними.
- 3.11. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна 10 см , а диагонали боковых граней $2\sqrt{10} \text{ см}$ и $2\sqrt{17} \text{ см}$. Найдите объем параллелепипеда.
- 3.12. В основании прямой призмы лежит ромб. Площадь основания призмы равна 48 см^2 , а площади ее диагональных сечений равны 30 см^2 и 40 см^2 . Найдите объем призмы.
- 3.13. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 3 см , площадь боковой поверхности равна 80 см^2 . Найдите объем пирамиды.
- 3.14. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см , площадь боковой поверхности в два раза больше площади основания. Найдите объем пирамиды.
- 3.15. Площадь боковой поверхности конуса равна $60\pi \text{ см}^2$; расстояние от центра основания до образующей равно $4,8 \text{ см}$. Найдите объем конуса.
- 3.16. Основание наклонной призмы — квадрат со стороной 6 см ; одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно плоскости основания и является ромбом с углом 60° . Найдите объем призмы.
- 3.17. В основании наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной 3 см . Две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию, две другие образуют с плоскостью основания углы 30° . Полная поверхность параллелепипеда 72 см^2 . Найдите объем параллелепипеда.
- 3.18. В основании наклонного параллелепипеда — ромб со стороной 4 см и острым углом 45° ; боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60° ; диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания. Найдите объем параллелепипеда.
- 3.19. Все 9 ребер наклонной призмы равны 4 см . Объем призмы равен 24 см^3 . Найдите угол наклона бокового ребра призмы к плоскости основания.

- 3.20. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 5 см, 12 см и 13 см. Площадь меньшей боковой грани равна 22 см^2 . Найдите объем призмы.
- 3.21. В основании наклонной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 см и 6 см. Боковое ребро призмы составляет с плоскостью основания угол 60° . Объем призмы равен 60 см^3 . Найдите длину бокового ребра призмы.
- 3.22. Две боковые грани наклонной треугольной призмы образуют угол 60° ; расстояние от их общего ребра до двух других ребер равно 5 см; боковое ребро призмы равно 8 см. Найдите боковую поверхность призмы.
- 3.23. Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны. Сумма их площадей равна 70 см^2 . Длина бокового ребра равна 5 см. Объем призмы равен 120 см^3 . Найдите расстояния между боковыми ребрами призмы.
- 3.24. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.
- 3.25. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Сторона основания пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды.
- 3.26. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° . Высота пирамиды равна 3 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.
- 3.27. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 60° . Высота пирамиды равна 6 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.
- 3.28. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 30° . Сторона основания пирамиды равна 12 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.
- 3.29. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см и образует с боковой гранью угол 30° . Найдите объем пирамиды.
- 3.30. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см и образует с боковым ребром угол 45° . Найдите объем пирамиды.
- 3.31. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а боковое ребро — 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

- 3.32. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 20 см, а боковое ребро — 16 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 3.33. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 3.34. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 60° . Найдите объем пирамиды.
- 3.35. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 30° . Найдите объем пирамиды.
- 3.36. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна 16 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 45° . Найдите объем пирамиды.
- 3.37. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 5 см; диагональное сечение равновелико основанию. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 3.38. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см; диагональное сечение равновелико основанию. Найдите боковую поверхность пирамиды.
- 3.39. Радиус цилиндра равен 8 см, а его высота равна 12 см. Через середину оси цилиндра проведена прямая, пересекающая плоскость нижнего основания цилиндра на расстоянии 24 см от центра нижнего основания. В каких отношениях эта прямая делит пересекающиеся с ней образующие цилиндра?
- 3.40. Радиус цилиндра равен 6 см, а его высота равна 10 см. Через середину образующей цилиндра проведена прямая, пересекающая ось цилиндра. Эта прямая пересекает нижнее основание цилиндра на расстоянии 3 см от центра нижнего основания. В каком отношении эта прямая делит ось цилиндра?
- 3.41. Радиус цилиндра равен 8 см. Через середину оси цилиндра проведена прямая, пересекающая плоскость, содержащую нижнее основание цилиндра, на расстоянии 12 см от центра нижнего основания. Эта прямая пересекает образующую цилиндра на расстоянии 2 см от плоскости нижнего основания. Найдите высоту цилиндра.

- 3.42. Высота цилиндра равна 12 см. Через середину образующей цилиндра проведена прямая, пересекающая ось цилиндра на расстоянии 4 см от нижнего основания. Эта прямая пересекает плоскость, содержащую нижнее основание цилиндра, на расстоянии 18 см от центра нижнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.
- 3.43. Высота конуса равна 20 см, расстояние от центра основания до образующей равно 12 см. Найдите объем конуса.
- 3.44. Радиус основания конуса равен 20 см; расстояние от центра основания до образующей равно 12 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 3.45. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов — 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию.
- 3.46. На расстоянии 4 см от вершины пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Площадь сечения равна 10 см^2 и составляет $\frac{1}{4}$ от площади основания пирамиды. Найдите объем пирамиды.
- 3.47. Радиус основания конуса 6 см, а высота равна 12 см. В конусе проведено сечение параллельно основанию. Радиус сечения равен 4 см. В каком отношении сечение делит высоту конуса?
- 3.48. Высота конуса равна 12 см, а радиус основания равен 3 см. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы его площадь была равна $\pi \text{ см}^2$?
- 3.49. В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину несоприкасающегося с этой диагональю бокового ребра. Расстояние от плоскости сечения до вершины нижнего основания, не лежащей в плоскости сечения, равно 5 см. Площадь сечения равна 10 см^2 . Найдите объем параллелепипеда.
- 3.50. В правильной четырехугольной призме проведено сечение через диагональ нижнего основания и конец непараллельной ей диагонали верхнего основания. Площадь основания призмы и площадь сечения равны 20 см^2 . Найдите объем призмы.

- 3.51. В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону нижнего основания и середину противоположащего бокового ребра. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 45° ; площадь сечения равна $4\sqrt{6}$ см². Найдите объем призмы.
- 3.52. Высота правильной треугольной призмы равна 12 см. В призме проведено сечение через сторону нижнего основания и противоположащую вершину верхнего основания. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания призмы под углом 60° . Найдите объем призмы.
- 3.53. В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину непересекающегося с этой диагональю бокового ребра. Объем меньшего из двух многогранников, на которые параллелепипед делится плоскостью сечения, равен 40 см³. Найдите объем параллелепипеда.
- 3.54. В треугольной призме проведено сечение через сторону нижнего основания и противоположащую вершину верхнего основания. В каком отношении плоскость сечения делит объем призмы?
- 3.55. В треугольной пирамиде проведено сечение через среднюю линию нижнего основания и вершину пирамиды. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?
- 3.56. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания перпендикулярно основанию. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?
- 3.57. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение через ребро нижнего основания и точку пересечения диагоналей противоположащей боковой грани. В каком отношении плоскость сечения делит объем параллелепипеда?
- 3.58. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию. Плоскость сечения делит пирамиду на части, объемы которых относятся как 1 : 26, считая от вершины. В каком отношении плоскость сечения делит высоту пирамиды?
- 3.59. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию. Плоскость сечения делит высоту пирамиды на части, отношение которых равно 2 : 1, считая от вершины. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?

- 3.60. Площадь основания пирамиды равна 1 м^2 . Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две равновеликие части. Найдите площадь сечения пирамиды.
- 3.61. Развертка боковой поверхности правильной треугольной призмы есть прямоугольник со сторонами 15 см и 12 см. Определите объем этой призмы. Найдите оба решения.
- 3.62. Развертка боковой поверхности правильной треугольной призмы есть прямоугольник со сторонами 18 см и 9 см. Определите площадь полной поверхности этой призмы. Найдите оба решения.
- 3.63. Прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см может быть двумя способами свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы. Сравните объемы этих призм.
- 3.64. Прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см может быть двумя способами свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы. Сравните площади полных поверхностей этих призм.
- 3.65. Прямоугольник со сторонами 12 см и 8 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы высотой 8 см, а во второй — правильной треугольной призмы с такой же высотой. Сравните объемы этих призм.
- 3.66. Прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы высотой 10 см, а во второй — правильной треугольной призмы с такой же высотой. Сравните площади полных поверхностей этих призм.
- 3.67. Квадрат со стороной 12 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной треугольной призмы, а во второй — правильной четырехугольной призмы. Сравните площади полных поверхностей этих призм.
- 3.68. Квадрат со стороной 24 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной треугольной призмы, а во второй — правильной четырехугольной призмы. Сравните объемы этих призм.
- 3.69. Ромб со стороной 10 см и острым углом 60° вращается около стороны. Найдите объем тела вращения.
- 3.70. Ромб со стороной 8 см и острым углом 60° вращается около стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

- 3.71. Прямоугольная трапеция с основаниями 5 см и 8 см и высотой 4 см вращается около большего основания. Найдите объем тела вращения.
- 3.72. Прямоугольная трапеция с основаниями 6 см и 10 см и высотой 3 см вращается около большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.
- 3.73. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 14 см и высотой 3 см вращается около меньшего основания. Найдите объем тела вращения.
- 3.74. Прямоугольная трапеция с основаниями 12 см и 15 см и высотой 4 см вращается около меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.
- 3.75. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 15 см и высотой 12 см в первый раз вращается около меньшего из оснований, а во второй — около большего. Сравните объемы тел вращения.
- 3.76. Прямоугольная трапеция с основаниями 12 см и 20 см и высотой 15 см в первый раз вращается около меньшего из оснований, а во второй — около большего. Сравните площади поверхностей тел вращения.
- 3.77. Равнобокая трапеция с основаниями 10 см и 16 см и высотой 4 см вращается около меньшего основания. Найдите объем тела вращения.
- 3.78. Равнобокая трапеция с основаниями 10 см и 18 см и высотой 3 см вращается около меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.
- 3.79. Равнобокая трапеция с основаниями 12 см и 18 см и высотой 4 см вращается около большего основания. Найдите объем тела вращения.
- 3.80. Равнобокая трапеция с основаниями 15 см и 25 см и высотой 12 см вращается около большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.
- 3.81. Равнобокая трапеция с основаниями 12 см и 24 см и высотой 8 см в первый раз вращается около меньшего основания, а во второй — около большего. Сравните объемы тел вращения.
- 3.82. Равнобокая трапеция с основаниями 12 см и 28 см и высотой 6 см в первый раз вращается около меньшего основания, а во второй — около большего. Сравните площади поверхностей тел вращения.

- 3.83. Прямоугольный треугольник с катетом 3 см и гипотенузой 6 см вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем тела вращения.
- 3.84. Квадрат со стороной 8 см вращается около прямой, проведенной через вершину параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.
- 3.85. Правильный треугольник со стороной 4 см вращается около оси, проведенной через вершину параллельно стороне, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.
- 3.86. Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вращается около прямой, параллельной меньшему из катетов и проходящей через вершину меньшего из углов треугольника. Найдите объем тела вращения.
- 3.87. Ромб со стороной 13 см и диагональю 10 см вращается около оси, проходящей через вершину тупого угла параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.
- 3.88. Ромб $ABCD$ со стороной 10 см и диагональю $AC = 12$ см в первый раз вращается около оси, проходящей через вершину A параллельно диагонали BD , а во второй — через вершину B параллельно диагонали AC . Сравните объемы тел вращения.
- 3.89. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 18 см и высотой 6 см вращается около прямой, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно основаниям. Найдите объем тела вращения.
- 3.90. Три металлических кубика с ребром a сплавлены в один шар. Что больше: площадь поверхности этого шара или суммарная площадь поверхностей кубиков?
- 3.91. Четыре металлических шарика радиуса a сплавлены в один куб. Что больше: площадь поверхности этого куба или суммарная площадь поверхностей шариков?
- 3.92. Сколько шариков диаметром 2 см можно отлить из металлического куба с ребром 4 см?
- 3.93. Сколько кубиков с ребром 2 см можно отлить из металлического шара диаметром 4 см?
- 3.94. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Объем цилиндра равен V . Найдите объем призмы.

- 3.95.** В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Площадь боковой поверхности призмы равна S . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 3.96.** В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Площадь боковой поверхности призмы равна S . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 3.97.** В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Объем конуса равен V . Найдите объем пирамиды.
- 3.98.** В конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Объем пирамиды равен V . Найдите объем конуса.
- 3.99.** В куб вписан шар. Найдите отношение площадей поверхностей куба и шара.
- 3.100.** В шар вписан куб. Найдите отношение объемов шара и куба.

4

Задания 9, 10 для экзамена «Математика»

Задания 6, 7 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

Вычислите (№ 4.1 — 4.4):

$$4.1. \frac{\sin 75^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 285^\circ}.$$

$$4.2. \frac{\sin 70^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 25^\circ}.$$

$$4.3. \frac{\cos 105^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 315^\circ}.$$

$$4.4. \frac{\sin 55^\circ \cos 35^\circ - \cos^2 10^\circ}{\sin 200^\circ}.$$

Сравните значения выражений (№ 4.5, 4.6):

$$4.5. \frac{1 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ} \text{ и } \frac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \sin 5^\circ}{\sin 95^\circ \cos 5^\circ + \cos 95^\circ \sin 5^\circ}.$$

$$4.6. \frac{\sin 20^\circ - \sin 40^\circ}{1 - \cos 20^\circ + \cos 40^\circ} \text{ и } \frac{\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \cos 25^\circ \sin 5^\circ}{\cos 15^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 5^\circ}.$$

$$4.7. \text{ Упростите выражение } \cos(2\pi - 3x) \cos x + \sin 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \\ \text{ и укажите все } x, \text{ при которых его значение равно } -\frac{1}{2}.$$

$$4.8. \text{ Упростите выражение } \sin(\pi - 3x) \cos x + \cos 3x \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \\ \text{ и укажите все } x, \text{ при которых его значение равно } -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.9. Укажите наименьшее положительное число x , при котором

$$\sin x^\circ = \sin^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 15^\circ.$$

4.10. Укажите наименьшее положительное число x , при котором $\cos x^\circ = \frac{\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ}{\sin 270^\circ}$.

4.11. Укажите наименьшее положительное число x , при котором значение выражения $\frac{\sin 30^\circ \cos x^\circ + \cos 30^\circ \sin x^\circ}{\cos 180^\circ}$

$$\text{равно } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4.12. Укажите наименьшее положительное число x , при котором значение выражения $\frac{\cos 45^\circ \cos x^\circ - \sin 45^\circ \sin x^\circ}{\sin 270^\circ}$ равно 0,5.

Решите уравнение (№ 4.13 — 4.30):

- 4.13.** $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$. **4.14.** $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
4.15. $\cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0$. **4.16.** $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$.
4.17. $\cos 2x + 8 \sin x = 3$. **4.18.** $\cos 2x = 1 + 4 \cos x$.
4.19. $\cos 2x + \sin x = 0$. **4.20.** $\cos 2x + \cos x = 0$.
4.21. $5 - 4 \sin^2 x = 4 \cos x$. **4.22.** $\cos 2x + 9 \sin x + 4 = 0$.
4.23. $\cos 2x - 7 \cos x + 4 = 0$. **4.24.** $2 \cos 2x = 1 + 4 \cos x$.
4.25. $2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4$. **4.26.** $2 \cos 2x = 8 \sin x + 5$.
4.27. $\sin 2x - \sin x = 2 \cos x - 1$.
4.28. $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1$.
4.29. $\sin 2x + 2 \sin x = \cos x + 1$.
4.30. $\sin 2x + 2 \cos x = \sin x + 1$.

4.31. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.32. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4.33. Найдите все решения уравнения $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.34. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.35. Найдите все решения уравнения $\sin x = \cos x$, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 0]$.

4.36. Найдите все решения уравнения $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

4.37. Найдите все решения уравнения $\sin x + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.38. Найдите все решения уравнения $\sin x = \sqrt{3} \cos x$, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

4.39. Найдите все решения уравнения $\frac{2 \cos x + \sin x}{\cos x - 7 \sin x} = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

- 4.40. Найдите все решения уравнения $\frac{3 \sin x + \cos x}{\cos x + 5 \sin x} = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.
- 4.41. Найдите все решения уравнения $\frac{2 \sin x - \cos x}{5 \sin x - 4 \cos x} = \frac{1}{3}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.
- 4.42. Найдите все решения уравнения $\frac{\sin x - 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} = -\frac{1}{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Вычислите координаты точек пересечения графиков функций (№ 4.43 — 4.46):

4.43. $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$. 4.44. $y = 3 \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$.

4.45. $y = \sin^2 x$ и $y = 3 \cos^2 x$. 4.46. $y = \sin 2x$ и $y = 2 \cos^2 x$.

Найдите абсциссы общих точек графиков функций (№ 4.47 — 4.50):

4.47. $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$. 4.48. $y = 2 + \cos 2x$ и $y = \cos x$.

4.49. $y = 3 \sin 2x$ и $y = 4 \cos x$. 4.50. $y = 3 \cos x - 1$ и $y = \cos 2x$.

Степени и логарифмы

Вычислите (№ 4.51 — 4.58):

4.51. $\log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3$.

4.52. $\log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81$.

4.53. $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}$.

4.54. $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2 \log_{49} 2}$.

4.55. $(3 \log_7 2 - \log_7 24) : (\log_7 3 + \log_7 9)$.

4.56. $(3 \lg 2 + \lg 0,25) : (\lg 14 - \lg 7)$.

4.57. $(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8})^{\lg 5}$.

4.58. $(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4})^{\log_5 7}$.

Решите уравнение (№ 4.59 — 4.80):

4.59. $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$.

4.60. $3^{1-x} - 3^x = 2$.

$$4.61. \frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 2^{3-x} = 3.$$

$$4.62. \frac{1}{27} \cdot 3^{x+2} + 3^{2-x} = 4.$$

$$4.63. 5^x - \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 4.$$

$$4.64. 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 7^{x-1} = 1.$$

$$4.65. \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0.$$

$$4.66. 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$$

$$4.67. 9^x - 3^{x+1} = 54.$$

$$4.68. 3^{x-1} + 2 \cdot 3^{-x-1} - 1 = 0.$$

$$4.69. 2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot 10^{3x^2-1}.$$

$$4.70. 5^{x^2-15} = 25^x.$$

$$4.71. 0,1^{5x-8-x^2} = 100.$$

$$4.72. 3^{x^2-4x} = 243.$$

$$4.73. 4^x - 3 \cdot 2^x = 4.$$

$$4.74. 9^x + 8 \cdot 3^x = 9.$$

$$4.75. 2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4.$$

$$4.76. 3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3.$$

$$4.77. 9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0.$$

$$4.78. 2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0.$$

$$4.79. 4^x + 2^x = 12.$$

$$4.80. 2^{x^2-1} \cdot 5^{x^2-1} = 0,001 \cdot (10^{x+2})^3.$$

Решите неравенство (№ 4.81 — 4.86):

$$4.81. 3^{x^2} \leq 81.$$

$$4.82. 27^x < 9^{x^2-1}.$$

$$4.83. 10^x - 8 \cdot 5^x \geq 0.$$

$$4.84. 3^x - 2 \cdot 6^x > 0.$$

$$4.85. \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0.$$

$$4.86. \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+2} < 0.$$

4.87. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2^x + 2^{3-x} < 9$.

4.88. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $3^x + 3^{2-x} < 10$.

Решите уравнение (№ 4.89 — 4.92):

$$4.89. \log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1.$$

$$4.90. \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4.$$

$$4.91. \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1.$$

$$4.92. \log_2 (x^2 - 4x + 4) = 4.$$

4.93. Укажите все целые решения неравенства

$$\log_4 (x^2 + 2x - 8) < 2.$$

4.94. Укажите все натуральные решения неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geq -1.$$

Решите неравенство (№ 4.95 — 4.100):

4.95. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x + 10) > -2.$ 4.96. $\log_2(x^2 - 13x + 30) < 3.$

4.97. $\log_3(x^2 - 2x) > 1.$ 4.98. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 3) < -2.$

4.99. $\log_2(x^2 - x - 2) \geq 2.$ 4.100. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 11x - 4) \leq -5.$

Решите уравнение (№ 4.101 — 4.106):

4.101. $3^{3x} + 3^{2x+1} = 3^x + 3.$ 4.102. $5^{4x-1} + 5^{3x+1} = 5^x + 25.$

4.103. $6^x - 3^x = 2^x - 1.$ 4.104. $6^{x+1} - 18 \cdot 2^x = 3^{x+1} - 9.$

4.105. Укажите отрицательный корень уравнения

$$2^{3x+1} - 2^{2x} = 2^{x+1} - 1.$$

4.106. Укажите положительный корень уравнения

$$4^{5x} - 4^{2x-1} = 4^{3x+1} - 1.$$

Решите уравнение (№ 4.107 — 4.110):

4.107. $\log_5 \frac{1-2x}{x+3} = 1.$ 4.108. $\log_4 \frac{4+2x}{x-5} = 2.$

4.109. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3x+2}{2x-7} = -1.$ 4.110. $\log_{\frac{1}{6}} \frac{16-20x}{3x+4} = -2.$

Решите уравнение (№ 4.111 — 4.118):

4.111. $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}.$ 4.112. $\frac{14^{x^2+2}}{2^7} = \frac{7^7}{14^{4x}}.$

4.113. $\frac{10^{x^2}}{2^4} = \frac{5^4}{10^{9-6x}}.$ 4.114. $\frac{15^{x^2+16}}{3^2} = \frac{5^2}{15^{8-9x}}.$

4.115. $\frac{2^{x^2+2}}{6^2} = \frac{6^2}{3^{x^2+2}}.$ 4.116. $\frac{4^{x^2}}{14^x} = \frac{14^{2x}}{7^{2x^2}}.$

4.117. $\frac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \frac{12^{1-2x}}{3^{x^2} 3^x}.$ 4.118. $\frac{3^{x^2+3x}}{21^{2x}} = \frac{21^{2x}}{7^{x^2+3x}}.$

Решите неравенство (№ 4.119 — 4.134):

$$4.119. \frac{4^x - 2}{1 - 3x} > 0.$$

$$4.120. \frac{2^x - 1}{3x + 2} < 0.$$

$$4.121. \frac{27 - 9^x}{4x - 1} > 0.$$

$$4.122. \frac{5 - 25^x}{2x + 5} < 0.$$

$$4.123. \frac{x + 4}{\lg x} \geq 0.$$

$$4.124. \frac{x + 5}{\log_{\frac{1}{3}} x} > 0.$$

$$4.125. \frac{x - 3}{\log_5 x} \leq 0.$$

$$4.126. \frac{3x - 1}{\log_{\frac{1}{4}} x} > 0.$$

$$4.127. \frac{3x - 4}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 0.$$

$$4.128. \frac{2x - 1}{\lg x} > 0.$$

$$4.129. \frac{(0,1)^x + 1000}{2x - 3} < 0.$$

$$4.130. \frac{4 - (0,5)^x}{x - 1} > 0.$$

$$4.131. \frac{\lg x + 1}{4x - 1} < 0.$$

$$4.132. \frac{\log_{\frac{1}{3}} x + 2}{2x + 1} > 0.$$

$$4.133. \frac{x - 3}{4^x - 1} \leq 0.$$

$$4.134. \frac{x - 9}{2^x - 1} \geq 0.$$

Решите систему уравнений (№ 4.135 — 4.156):

$$4.135. \begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x = 3^{y+1}. \end{cases}$$

$$4.136. \begin{cases} 16^x = 64^y, \\ 27^{x+1} = 81^{y-1}. \end{cases}$$

$$4.137. \begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16. \end{cases}$$

$$4.138. \begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x+3y} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$4.139. \begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2. \end{cases}$$

$$4.140. \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ \frac{3^{8x}}{3^{3y}} = 9. \end{cases}$$

$$4.141. \begin{cases} y - x = 7, \\ 3^x \cdot 3^{2(y-1)} = 27. \end{cases}$$

$$4.142. \begin{cases} \frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1, \\ 2^{x-2} \cdot 2^y = 8. \end{cases}$$

$$4.143. \begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ 2^{x+y} = 4^{x-y+2}. \end{cases}$$

$$4.144. \begin{cases} 2y - x = 6, \\ 9^{2x-y} = 3^{2-3y}. \end{cases}$$

$$4.145. \begin{cases} 2x - y = 1, \\ \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} \end{cases}$$

$$4.146. \begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3 \end{cases}$$

$$4.147. \begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 8 \cdot 2^y = 4^{2x+2,5} \end{cases}$$

$$4.148. \begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$$

$$4.149. \begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ \log_3 \frac{x+1}{y} = 2. \end{cases}$$

$$4.150. \begin{cases} x + y - 10 = 0, \\ \log_2 \frac{y-1}{x} = 3. \end{cases}$$

$$4.151. \begin{cases} 3x + y = 3, \\ \log_3(5x + 4y) = \log_3(y + 5). \end{cases}$$

$$4.152. \begin{cases} y - 2x = 2, \\ \log_5(y - x) = \log_5(x + 2). \end{cases}$$

$$4.153. \begin{cases} 4x - y = 2, \\ \log_{12} x + \log_{12} 3 = \log_{12}(y + 1). \end{cases}$$

$$4.154. \begin{cases} x + 4y = 16, \\ \log_7 y - \log_7 4 = \log_7(x + 1). \end{cases}$$

$$4.155. \begin{cases} 2x + y = 15, \\ x - 3y = \log_2 144 - \log_2 9. \end{cases}$$

$$4.156. \begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2x + y = \log_3 135 - \log_3 5. \end{cases}$$

Производная и ее приложения

4.157. Найдите значение производной функции $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$

в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

4.158. Найдите значение производной функции $y = \ln(2 - x)$ в точке $x_0 = -1$.

4.159. Найдите значение производной функции $y = e^{2x-1}$

в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.

4.160. Найдите значение производной функции $y = \sqrt{2x+5}$ в точке $x_0 = 2$.

4.161. Найдите значение производной функции $y = e^x \sin x + x$ в точке $x_0 = 0$.

- 4.162. Найдите значение производной функции $y = \frac{x}{x+1}$ в точке $x_0 = -2$.
- 4.163. Найдите значение производной функции $y = x \ln x$ в точке $x_0 = 1$.
- 4.164. Найдите значение производной функции $y = \frac{\ln x}{x}$ в точке $x_0 = 1$.
- 4.165. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.
- 4.166. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения его с осью ординат.
- 4.167. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.
- 4.168. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке графика с ординатой 2.
- 4.169. Выясните, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $y = 4x^3$.
- 4.170. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.
- 4.171. Выясните, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$.
- 4.172. Выясните, является ли прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$.
- 4.173. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.
- 4.174. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.

- 4.175. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.
- 4.176. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x + \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{2}$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.
- 4.177. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x + e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.
- 4.178. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x - \frac{1}{x^2}$, параллельной прямой $y = 3x$.
- 4.179. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x - \ln x$, параллельной прямой $y = x$.
- 4.180. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2\sqrt{x} + x$, параллельной прямой $y = 2x$.
- 4.181. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2 - 5x$ параллельна прямой $y = -x$?
- 4.182. В какой точке касательная к графику функции $y = \sqrt{x}$ параллельна прямой $y = x$?
- 4.183. В каких точках касательные к графику функции $y = x^3 - 3x + 1$ параллельны оси абсцисс?
- 4.184. В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?
- 4.185. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.
- 4.186. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = e^x - x$.
- 4.187. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \cos x + 2x$.
- 4.188. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \frac{1}{x}$.

- 4.189. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln x + \frac{1}{x}$.
- 4.190. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2x}{e^x}$.
- 4.191. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2xe^x$.
- 4.192. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 0,5x + \sin x$.
- 4.193. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[4; 5]$.
- 4.194. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на отрезке $[2; 3]$.
- 4.195. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на отрезке $[-1; 2]$.
- 4.196. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на отрезке $[-2; 2]$.
- 4.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 1]$.
- 4.198. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ на отрезке $[-3; 3]$.
- 4.199. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке $[-1; 4]$.
- 4.200. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на отрезке $[-4; 4]$.

5

Задание 8 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

Решите уравнение (№ 5.1 — 5.14):

$$5.1. -\sin \frac{x}{2} = \cos x.$$

$$5.2. \cos \frac{x}{2} + \cos x = 0.$$

$$5.3. 3 \cos 2x = 4 - 11 \cos x.$$

$$5.4. \cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0.$$

$$5.5. \sin x = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$5.6. \cos x = x^2 + 1.$$

$$5.7. \cos x = 1 + |x|.$$

$$5.8. \sin x = 1 + 2^x.$$

$$5.9. 2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0.$$

$$5.10. -2 \sin x + 5 \sin 2x = 0.$$

$$5.11. 2 \cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0.$$

$$5.12. 2 \sin x + 3 \cos 2x - 3 = 0.$$

$$5.13. 6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

$$5.14. \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$$

Решите систему уравнений (№ 5.15 — 5.18):

$$5.15. \begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2 \sin x = 19. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} 3y + 2 \operatorname{tg} x = 4, \\ 2y + 3 \operatorname{tg} x = 1. \end{cases}$$

$$5.17. \begin{cases} 4y + \sqrt{3} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ 28y + 4\sqrt{3} \cos x = 1. \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} 2\sqrt{3} \sin x - 8y = -1, \\ \sqrt{3} \sin x - 7y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решите неравенство (№ 5.19 — 5.26):

$$5.19. \cos x < x^2 + 1.$$

$$5.20. \cos x \leq 1 + |x|.$$

$$5.21. \cos x \leq 1 + 3^x.$$

$$5.22. \cos x \geq x^2 + 1.$$

$$5.23. \cos x \geq 1 + |x|.$$

$$5.24. \cos x \geq 1 + 2^x.$$

$$5.25. \cos x < 1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x}.$$

$$5.26. \cos x > 1 + \frac{1}{1 + x^4}.$$

Иррациональные уравнения

Решите уравнение (№ 5.27 — 5.48):

$$5.27. \sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

$$5.28. \sqrt{3x^2 - 4x - 2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$$

$$5.29. \sqrt{3x^2 - 2x - 2} = \sqrt{4x^2 - 5x}.$$

$$5.30. \sqrt{3x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 6x + 13}.$$

$$5.31. \sqrt{2x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}.$$

$$5.32. \sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}.$$

$$5.33. \sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}.$$

$$5.34. \sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2x^2 - 6x - 1}.$$

$$5.35. 3x + 1 = \sqrt{1 - x}.$$

$$5.36. 8 - 3x = \sqrt{x + 2}.$$

$$5.37. 8 - 2x = \sqrt{x + 1}.$$

$$5.38. x - 2 = \sqrt{2 - x}.$$

$$5.39. \sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$$

$$5.40. \sqrt{8 - 6x - x^2} - x = 6.$$

$$5.41. \sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$$

$$5.42. \sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1.$$

$$5.43. \sqrt{3x^2 - 4x + 2} = 2x - 3.$$

$$5.44. \sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$$

$$5.45. 2\sqrt{x + 5} = x + 2.$$

$$5.46. 2\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1.$$

$$5.47. 4\sqrt{x + 6} = x + 1.$$

$$5.48. 2\sqrt{5 - x^2} = x - 1.$$

Решите систему уравнений (№ 5.49 — 5.52):

$$5.49. \begin{cases} \sqrt{x + 3y + 6} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 1. \end{cases}$$

$$5.50. \begin{cases} \sqrt{x + y - 3} = 1, \\ \sqrt{3x - 2y + 1} = 2. \end{cases}$$

$$5.51. \begin{cases} \sqrt{2x - 3y + 2} = 3, \\ \sqrt{3x + 2y - 5} = 2. \end{cases}$$

$$5.52. \begin{cases} \sqrt{3y - 2x - 2} = 1, \\ \sqrt{4x - 2y + 3} = 2. \end{cases}$$

Найдите координаты общих точек графиков функций (№ 5.53 — 5.56):

$$5.53. y = \frac{1}{2}x + 5 \text{ и } y = \sqrt{1 - 2x}.$$

$$5.54. y = 2x - 7 \text{ и } y = \sqrt{2x - 1}.$$

$$5.55. y = 1 - 4x \text{ и } y = \sqrt{2x + 1}.$$

$$5.56. y = -1 - 2x \text{ и } y = \sqrt{2x + 3}.$$

Степени и логарифмы

Решите уравнение (№ 5.57 — 5.64):

$$5.57. 3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0.$$

$$5.58. 3 \cdot 2^x - 2^{\frac{x}{2}+1} = 1.$$

$$5.59. 3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0.$$

$$5.60. 9^x + 4^x = 2,5 \cdot 6^x.$$

$$5.61. 9^x + 4^{x+1,5} = 6^{x+1}.$$

$$5.62. 4^{x+1} - 6^x - 2 \cdot 9^{x+1} = 0.$$

$$5.63. 32^{3(x^2-8)} = 8^{19(2x-x^2)}.$$

$$5.64. 8^{4(x^2+8)} = 16^{7(x^2+2x)}.$$

Решите неравенство (№ 5.65 — 5.68):

$$5.65. \log_2(x-1) + \log_2 x < 1.$$

$$5.66. \log_3(x+2) + \log_3 x > 1.$$

$$5.67. \log_2(x+1) + \log_2 x < 1.$$

$$5.68. \lg x + \lg(x-3) > 1.$$

Решите неравенство (№ 5.69 — 5.76):

$$5.69. \log_{0,5}(4-x) \geq \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x-1).$$

$$5.70. \log_3(x^2 - 7x + 12) < \log_3 20.$$

$$5.71. \log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11).$$

$$5.72. -\log_2(x^2 + 3x) \geq 0.$$

$$5.73. \log_{\frac{1}{2}} \frac{6-x}{x+1} \leq -2.$$

$$5.74. \log_3 \frac{8-x}{x+2} \geq 1.$$

$$5.75. \log_2 \frac{6+x}{x-3} < 2.$$

$$5.76. \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-2} > -1.$$

Решите систему уравнений (№ 5.77 — 5.82):

$$5.77. \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

$$5.78. \begin{cases} 2^y = 200 \cdot 5^x, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$$5.79. \begin{cases} 7^{x-1} \cdot 2^y = 4, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

$$5.80. \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 7 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$$5.81. \begin{cases} 5^{x-1} \cdot 7^y = \frac{1}{7}, \\ y - x = -2. \end{cases}$$

$$5.82. \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 3^y = 6 \\ y + x = 1. \end{cases}$$

Производная и ее приложения

- 5.83. Найдите координаты точек, в которых касательные к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, имеющие угловой коэффициент -1 , пересекают ось абсцисс.
- 5.84. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-3}{x+3}$, имеющих угловой коэффициент 9 .
- 5.85. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \frac{3x-1}{x+8}$, имеющих угловой коэффициент 1 .
- 5.86. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, имеющих угловой коэффициент 4 .
- 5.87. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \frac{x+4}{x-5}$, имеющих угловой коэффициент -1 .
- 5.88. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{3x-5}{x-3}$, имеющих угловой коэффициент 25 .
- 5.89. Найдите точки экстремума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ на промежутке $\left(-\frac{6}{5}; 2\right)$.
- 5.90. Найдите точки экстремума функции $y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 4$ на промежутке $\left(-5; \frac{1}{5}\right)$.
- 5.91. Найдите экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.
- 5.92. Найдите экстремумы функции $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 1$.

- 5.93. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.
- 5.94. Найдите точки экстремума функции $y = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.
- 5.95. Найдите экстремумы функции $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.
- 5.96. Найдите экстремумы функции $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.
- 5.97. Найдите точки экстремума функции $y = x + 2e^{-x}$.
- 5.98. Найдите точки экстремума функции $y = 2x + 3e^{-x}$.
- 5.99. Найдите экстремумы функции $y = -x + 2e^x$.
- 5.100. Найдите экстремумы функции $y = -3x - 2e^{-x}$.

6

Задания 9, 10 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Уравнения

Решите уравнение (№ 6.1 — 6.78):

6.1. $\log_{x+1} (x^2 + x - 6)^2 = 4$. 6.2. $\log_5 (x - 8)^2 = 2 + 2 \log_5 (x - 2)$.

6.3. $\log_{9x^2} (6 + 2x - x^2) = \frac{1}{2}$. 6.4. $\log_{x-3} (x^2 - 4x)^2 = 4$.

6.5. $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$. 6.6. $\log_7 (7^{-x} + 6) = 1 + x$.

6.7. $\log_2 (2^x - 7) = 3 - x$. 6.8. $\log_4 (4^{-x} + 3) = x + 1$.

6.9. $\log_6 (6^{-x} + 5) = 1 + x$. 6.10. $\log_5 (5^x - 4) = 1 - x$.

6.11. $2 \log_7 (x - 2) = -2 + \log_7 (x - 10)^2$.

6.12. $\log_{(x-6)^2} (x^2 - 5x + 9) = \frac{1}{2}$.

6.13. $(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x} 18x + 1) = 0$.

6.14. $(x^2 - 7x + 10)(\log_x 8x + 1) = 0$.

6.15. $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} = 0$.

6.16. $(2x^2 - 3x - 2)\sqrt{3x + 1} = 0$.

6.17. $(6x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 0$.

6.18. $(3x^2 - x - 2)\sqrt{2x - 1} = 0$.

6.19. $(7x + 2)\sqrt{4x - 3x^2 - 1} = 0$.

6.20. $(3x - x^2 - 2)\sqrt{7x + 4} = 0$.

6.21. $(3x + 4)\sqrt{-3x - 2x^2 - 1} = 0$.

6.22. $(4x - x^2 - 3)\sqrt{5x - 8} = 0$.

$$6.23. 1 + \sin 3x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2.$$

$$6.24. 2 \sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2.$$

$$6.25. \cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0.$$

$$6.26. \cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x.$$

$$6.27. \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$$

$$6.28. \sin x + \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x = 0.$$

$$6.29. \cos 2x + \cos 6x + 2 \sin^2 x = 1.$$

$$6.30. 4 \cos x \sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0.$$

$$6.31. \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$

$$6.32. \sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x.$$

$$6.33. \cos x = \cos 3x + 2 \sin 2x.$$

$$6.34. 8 \sin^2 2x + 4 \sin^2 4x = 5.$$

$$6.35. \sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$$

$$6.36. \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

$$6.37. \cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1,5.$$

$$6.38. \cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x.$$

$$6.39. 2 \cos^2 4x - 6 \cos^2 2x + 1 = 0.$$

$$6.40. \sin 2x + \sin 6x = 3 \cos 2x.$$

$$6.41. 144 \cos^4 x - 4 \sin^4 x = 9 \sin^2 2x.$$

$$6.42. 2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x.$$

$$6.43. \cos 7x + \cos x = 2 \cos 3x(\sin 2x - 1).$$

$$6.44. \cos 5x - \cos x = \sin 3x(2 \cos 4x + 1).$$

$$6.45. \cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$$

$$6.46. \cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$$

$$6.47. \sin x \cos 3x = \sin 2x.$$

$$6.48. 5 \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x.$$

$$6.49. \sin^2 6x + \sin^2 4x = 1.$$

$$6.50. 2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

$$6.51. \sin 5x = \sin x + \sin 2x.$$

$$6.52. 6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5.$$

$$6.53. \cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0.$$

$$6.54. \cos x - \cos 3x = 3 \sin^2 x.$$

$$6.55. \cos^4 2x + 6 \cos^2 2x = \frac{25}{16}.$$

$$6.56. 3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0.$$

$$6.57. 2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7.$$

$$6.58. \operatorname{ctg}^2 x - 8 \sin^2 x = 1.$$

$$6.59. 9 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \sin^2 x = 6.$$

$$6.60. 1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x.$$

$$6.61. \cos x - \cos 3x = \sin 2x.$$

$$6.62. \cos 2x - \cos 4x = \sin 6x.$$

- 6.63. $\sin 2x = \cos \frac{4x}{2} - \sin \frac{4x}{2}$. 6.64. $\sin^2 x = \cos \frac{4x}{2} - \sin \frac{4x}{2}$.
- 6.65. $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$. 6.66. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$.
- 6.67. $\sin x \sin 5x = \cos 4x$. 6.68. $\cos x \cos 3x = \cos 2x$.
- 6.69. $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$. 6.70. $5 \sin x - 4 \operatorname{ctg} x = 0$.
- 6.71. $8 \sin^2 x + 4 \sin^2 2x = 5 - 8 \cos 2x$.
- 6.72. $2 \sin^2 x = 4 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 6$.
- 6.73. $\operatorname{tg} x(1 - 2 \sin x) - 2 \cos x = \sqrt{3}$.
- 6.74. $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = 2 \cos x$.
- 6.75. $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x$.
- 6.76. $-\operatorname{ctg} x(2 \cos x + \sqrt{3}) = 2 \sin x$.
- 6.77. $\sqrt{10} \cos x - \sqrt{4 \cos x - \cos 2x} = 0$.
- 6.78. $\sqrt{5} \sin 2x - \sqrt{1 + 8 \sin x \cos x} = 0$.
- 6.79. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4 \sin 3x \sin x + 2 \cos 2x + 1 = 0$.
- 6.80. Найдите наименьший положительный корень уравнения $8 \cos 6x \cos 2x + 2 \sin^2 4x - 3 = 0$.
- 6.81. Найдите все решения уравнения $\sin 4x + 2 \cos^2 x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.
- 6.82. Найдите все решения уравнения $2 \sin^2 x + \cos 4x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

Решите уравнение (№ 6.83 — 6.88):

- 6.83. $\sin x = x^2 + 2x + 2$. 6.84. $\cos x = x^2 - 2x + 2$.
- 6.85. $8 \sin x = x^2 - 10x + 33$. 6.86. $2 \cos x = -x^2 + 12x - 37$.
- 6.87. $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$. 6.88. $\sin \frac{\pi x}{2} = 12x - 37 - x^2$.

Решите уравнение (№ 6.89 — 6.107):

- 6.89. $4^{-x + \frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} = 4$. 6.90. $3^{6x-3} = 2 \cdot 27^{x - \frac{2}{3}} + 1$.
- 6.91. $4^{3x^2 + x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2 + \frac{x}{3}}$. 6.92. $2^{6x} + 8^{x + \frac{2}{3}} = 5$.
- 6.93. $64^x + 2^{2+3x} - 12 = 0$. 6.94. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

$$6.95. 4^{2|x|-3} - 3 \cdot 4^{|x|-2} - 1 = 0.$$

$$6.97. 2x^3 = -18 - x.$$

$$6.99. x^5 + 2x^3 = 48.$$

$$6.101. 2^x + x = 3.$$

$$6.103. 2^{x+1} + x = -\frac{3}{2}.$$

$$6.105. (15^{x^2+x-2})^{\sqrt{x-4}} = 1.$$

$$6.106. (0,7^{x-4})^{\sqrt{x^2-2x-15}} = 1.$$

$$6.107. (17^{\sqrt{x^2+2x-8}})^{x+3} = 1.$$

$$6.96. 8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x.$$

$$6.98. x^3 + 33 = -2x.$$

$$6.100. x^5 + 4x = -40.$$

$$6.102. 2^x = 6 - x.$$

$$6.104. 2^x = -\frac{1}{2} - x.$$

Решите систему уравнений (№ 6.108 — 6.144):

$$6.108. \begin{cases} \frac{1}{2x-3y} + \frac{2}{3x-2y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{2x-3y} + \frac{4}{3x-2y} = \frac{7}{4}. \end{cases} \quad 6.109. \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$6.110. \begin{cases} 2x - 2y = 3xy, \\ 4x^2 + 4y^2 = 5x^2y^2. \end{cases} \quad 6.111. \begin{cases} 2 + xy = 3x, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2. \end{cases}$$

$$6.112. \begin{cases} 2xy + 1 = 3y, \\ 12x^2y^2 + 8 = 11y^2. \end{cases} \quad 6.113. \begin{cases} 2xy + 2 + x = 0, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2. \end{cases}$$

$$6.114. \begin{cases} xy + x + y = 15, \\ x^2y + y^2x = 54. \end{cases} \quad 6.115. \begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - y^2x = 12. \end{cases}$$

$$6.116. \begin{cases} x^2y + x^2 - y = 7, \\ x^4y - y^2x^2 = 12. \end{cases} \quad 6.117. \begin{cases} xy^2 + x - y^2 = 21, \\ x^2y^2 - y^4x = 20. \end{cases}$$

$$6.118. \begin{cases} x^2y + y = 9, \\ y + x^2 = 9. \end{cases} \quad 6.119. \begin{cases} x^2 - xy = 3, \\ xy - y^2 = 2. \end{cases}$$

$$6.120. \begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases} \quad 6.121. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

$$6.122. \begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases} \quad 6.123. \begin{cases} 4x^2 + xy = 20y, \\ 4xy + y^2 = 5x. \end{cases}$$

$$6.124. \begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = \frac{5}{4}. \end{cases} \quad 6.125. \begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$$6.126. \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = 2, \\ 3x^2 + \frac{2}{y^2} = 3. \end{cases}$$

$$6.127. \begin{cases} \frac{1}{x} + y = -\frac{1}{2}, \\ y^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$6.128. \begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{50}{7}. \end{cases}$$

$$6.129. \begin{cases} xy = 5, \\ \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}. \end{cases}$$

$$6.130. \begin{cases} x - y = \log_2 y - \log_2 x, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$$

$$6.131. \begin{cases} x - y = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y, \\ x = y^2 - 6. \end{cases}$$

$$6.132. \begin{cases} 2^x 3^y = 24, \\ 2^y 3^x = 54. \end{cases}$$

$$6.133. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$

$$6.134. \begin{cases} xy = 16, \\ x^{\log_2 y} = 8. \end{cases}$$

$$6.135. \begin{cases} \log_y x = 2, \\ x^{\lg y} = 100. \end{cases}$$

$$6.136. \begin{cases} \log_2 \frac{x^2 \sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (1+y)^2 = 4. \end{cases}$$

$$6.137. \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = 6, \\ \log_4 x + \log_4 y = -3. \end{cases}$$

$$6.138. \begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5 (x+y) = x-y. \end{cases}$$

$$6.139. \begin{cases} 2x - \sin x = 2y - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$$

$$6.140. \begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y, \\ 3x - y = 6. \end{cases}$$

$$6.141. \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

$$6.142. \begin{cases} \sqrt{x-y+5} = 3, \\ \sqrt{x+y-5} = -2x+11. \end{cases}$$

$$6.143. \begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6. \end{cases}$$

$$6.144. \begin{cases} \sqrt{y-x-1} = 1, \\ \sqrt{x-2y+3} = 3y-2x-1. \end{cases}$$

Модули

Решите уравнение (№ 6.145 — 6.192):

6.145. $|2x - 3| = 3 - 2x$.

6.146. $|4 - 5x| = 5x - 4$.

6.147. $|3x - 5| = 5 - 3x$.

6.148. $|7 - 4x| = 7 - 4x$.

6.149. $|5x - 13| - |6 - 5x| = 7$.

6.150. $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$.

6.151. $|16 - 9x| - |9x - 5| = 11$.

6.152. $|7x - 12| - |7x - 1| = 1$.

6.153. $x^2 - 6|x| - 2 = 0$.

6.154. $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

6.155. $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$.

6.156. $-2 \cdot \frac{x}{|x|} - 2x = x^2 + 2$.

6.157. $5^{4x-6} = 25^{3x-4}$.

6.158. $3^{3x-4} = 9^{2x-2}$.

6.159. $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$.

6.160. $25^{1-2x} = 5^{4-6x}$.

6.161. $|\sin x| = \sin x + 2 \cos x$.

6.162. $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$.

6.163. $|\cos x| = \cos x - 2 \sin x$.

6.164. $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}$.

6.165. $\cos x = |\cos x| (x + 1,5)^2$.

6.166. $|\cos x| = \cos x (x - 2)^2$.

6.167. $\cos x = |\sin x|$.

6.168. $\sqrt{3} \sin x = |\cos x|$.

6.169. $2 \sin^2 x = |\sin x|$.

6.170. $2 \cos^2 x = |\sin x|$.

6.171. $2 \cos^2 x = |\cos x|$.

6.172. $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3} |\sin x|$.

6.173. $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x = 3 |\cos x|$.

6.174. $2 \sin^2 x = |\sqrt{3} \operatorname{tg} x|$.

6.175. $2 \cos^2 x = |\operatorname{ctg} x|$.

6.176. $4^{|x-2| \sin x} = 2^{x |\sin x|}$.

6.177. $\sin x = \operatorname{tg} x |\sin x|$.

6.178. $\cos x = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

6.179. $|\cos x| (2x - 4) = |x - 2|$.

6.180. $|\sin x| (4x + 2) = |2x + 1|$.

6.181. $|\operatorname{tg} x| (x + 3) = |x + 3|$.

6.182. $|\operatorname{ctg} x| (2x - 3) = |2x - 3|$.

6.183. $8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

6.184. $25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{|x-1|+1}$.

6.185. $|e^x - 1| = (2x + 3)(e^x - 1)$.

6.186. $\sin^2 x = \cos x |\sin x|$.

6.187. $\cos^2 x = \sin x |\cos x|$.

6.188. $|e^x - 1| = (3x + 2)(e^x - 1)$.

6.189. $|\sin x| + \sin x (x - 4)^2 = 0$.

6.190. $\sin x + |\sin x| (x + 1,5)^2 = 0$.

6.191. $|\log_2 x - 1| = (4 - 8x)(\log_2 x - 1)$.

6.192. $|\log_2 x - 1| = (2x + 5)(\log_2 x - 1)$.

Решите систему уравнений (№ 6.193 — 6.198):

$$\begin{array}{ll} 6.193. \begin{cases} 2|x-2| + 3|y+1| = 20, \\ 2x - y = 3. \end{cases} & 6.194. \begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases} \\ 6.195. \begin{cases} 4|x-3| + |y+2| = 7, \\ x + 2y = 4. \end{cases} & 6.196. \begin{cases} 2|x-1| - 3|y+2| = 1, \\ 2x + y = 3. \end{cases} \\ 6.197. \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = y - 1, \\ y + 2|x| = 1. \end{cases} & 6.198. \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 2y + 1} = 1, \\ x + |y| = 2. \end{cases} \end{array}$$

Решите неравенство (№ 6.199 — 6.206):

$$\begin{array}{ll} 6.199. 2|x+1| > x+4. & 6.200. 3|x-1| \leq x+3. \\ 6.201. 4|x+2| < 2x+10. & 6.202. 3|x+1| \geq x+5. \\ 6.203. 3x^2 - |x-3| > 9x-2. & 6.204. x^2 + 4 \geq |3x+2| - 7x. \\ 6.205. |x-2| - x < 2x^2 - 9x + 9. & 6.206. x^2 - |5x-3| - x < 2. \end{array}$$

Параметры

Решите уравнение (№ 6.207 — 6.210):

$$\begin{array}{ll} 6.207. \frac{a}{2a-x} = 3. & 6.208. \frac{a}{a-2x} = 3. \\ 6.209. \frac{a}{2a-x} = 2. & 6.210. \frac{a}{a-2x} = 2. \end{array}$$

6.211. Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$.

6.212. Найдите все значения a , при которых число $x = 3$ не является решением неравенства $2 \geq |x + 3a| + x^2$.

6.213. Найдите все значения a , при которых число $x = -3$ является решением неравенства $4 - |x - 2a| < x^2$.

6.214. Найдите все значения a , при которых число $x = -2$ является решением неравенства $3 - |x - 2a| > x^2$.

6.215. Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ не является решением неравенства $-2 \leq |x + 3a| - x^2$.

6.216. Найдите все значения a , при которых число $x = -1$ не является корнем уравнения $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$.

6.217. Найдите все значения a , при которых число $x = -2$ является корнем уравнения $|x - a| \cdot x + 1 - 2a = 0$.

6.218. Найдите все значения a , при которых число $x = 1$ не является корнем уравнения $|2x + a| \cdot (x^2 + 1) + 3 - 2a = 0$.

- 6.219. Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \cos \frac{11\pi x}{4}\right) \sqrt{8 - ax} = 0$.
- 6.220. Найдите все значения a , при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \sin \frac{11\pi x}{4}\right) \sqrt{11 - 3ax} = 0$.
- 6.221. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь три корня?
- 6.222. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ иметь пять корней?
- 6.223. Докажите, что уравнение $3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2$ имеет нечетное число корней.
- 6.224. Докажите, что уравнение $4^x - 4^{-x} = x^3 + 2ax$ имеет нечетное число корней.
- 6.225. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет ровно два корня.
- 6.226. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.
- 6.227. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ имеет ровно два корня.
- 6.228. Найдите, при каких значениях a уравнение $x - \log_3(2a - 9^x) = 0$ не имеет корней.
- 6.229. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 1| = ax + 2$.
- 6.230. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x + 1| = 3 - ax$.
- 6.231. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x + 2| + 1 = a - 2x$.
- 6.232. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 2| - 1 = a - 3x$.

Неравенства

Решите неравенство (№ 6.233 — 6.273):

6.233. $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} > 0$.

$$6.234. (4x - x^2 - 3)\sqrt{5x - 8} \leq 0.$$

$$6.235. (6x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \geq 0.$$

$$6.236. (3x - x^2 - 2)\sqrt{7x + 4} < 0.$$

$$6.237. (3x + 4)\sqrt{-3x - 2x^2 - 1} < 0.$$

$$6.238. (3x^2 - x - 2)\sqrt{2x - 1} \geq 0.$$

$$6.239. (7x + 2)\sqrt{4x - 3x^2 - 1} \leq 0.$$

$$6.240. (2x^2 - 3x - 2)\sqrt{3x + 1} > 0.$$

$$6.241. \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$6.242. 2^{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} > 2^{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

$$6.243. 3^{-\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \leq 3^{-\sqrt{x^2 - x + 5}}.$$

$$6.244. \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x-10}}.$$

$$6.245. \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$$

$$6.246. 2^{1+2x} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0.$$

$$6.247. 3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0.$$

$$6.248. 4^{5+4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \geq 0.$$

$$6.249. 5^{5-4x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3-4x} - 5 \geq 0.$$

$$6.250. \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$$

$$6.251. \log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} (5^{x+1} - 25^x) \leq -2. \quad 6.252. \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (3^{x+2} - 9^x) \geq -6.$$

$$6.253. \log_2 (2 - 3x) > 4x + 1. \quad 6.254. \log_2 (2 + x) > 1 - x.$$

$$6.255. 9^x - 2 \cdot 3^x < 3. \quad 6.256. 4^x - 3 \cdot 2^x < 4.$$

$$6.257. \log_x \frac{2x + \frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0. \quad 6.258. \log_x \frac{4x + 1}{6(x-1)} < 0.$$

6.259. $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} \geq 0.$

6.260. $\log_x \frac{2x+5}{4(x-1)} \leq 0.$

6.261. $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$

6.262. $\log_{-6x-5x^2} 6^x > 0.$

6.263. $\log_{x^2+4} 8 < 1.$

6.264. $\log_{x^2+2} 3 \geq 1.$

6.265. $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2.$

6.266. $2 \log_2 \sqrt{x} - 2 \geq \log_x \frac{1}{2}.$

6.267. $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} \leq -2.$

6.268. $\log_x 3 - 4 \geq -4 \log_3 x.$

6.269. $\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 6) \geq 0.$

6.270. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2^{x+2} - 4^x) \leq -2.$

6.271. $\log_{\frac{27}{41}} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \leq 0.$

6.272. $\log_{\frac{12}{11}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 3x - 4) \leq 0.$

6.273. $\log_2 \log_{\frac{9}{16}} (x^2 - 4x + 3) \leq 0.$

6.274. Найдите все значения x , при которых меньшее из чисел $1 + 2x$ и $2 + x$ больше -1 .

6.275. Найдите все значения x , при которых меньшее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ меньше 1 .

6.276. Найдите все значения x , при которых большее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ меньше 1 .

6.277. Найдите все значения x , при которых большее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ больше 1 .

Возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

6.278. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{2x^2 + 5x - 7} \text{ на отрезке } [3; 4].$$

6.279. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 3x + 5} \text{ на отрезке } [2; 5].$$

6.280. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{3}{\sqrt{3 + x - \frac{1}{4}x^2}} \text{ на отрезке } [-1; 3].$$

6.281. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}} \text{ на отрезке } [2; 3].$$

6.282. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \sqrt{4x^2 - x - 3}.$$

6.283. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \log_2(2x^2 - 3x - 2).$$

6.284. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}.$$

6.285. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}.$$

6.286. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \log_{0,5}(2x^2 - 3x - 2).$$

6.287. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

6.288. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3 , а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

6.289. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квадратом, а периметр нижнего основания равен 12 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

6.290. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен $0,5 \text{ см}^3$, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислите этот периметр.

6.291. Найдите наименьшее значение функции $y = x \ln x - x \ln 5$ на отрезке $[1; 5]$.

6.292. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{2} x \ln x - x \ln 2 \text{ на отрезке } [1; 4].$$

6.293. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{6} x \ln 9 \text{ на отрезке } [1; 3].$$

6.294. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2x \ln x - x \ln 49 \text{ на отрезке } [1; 7].$$

6.295. Найдите точки минимума функции

$$y = 2\sqrt{3} \cos x + 2 \sin x - 2x + 1.$$

6.296. Найдите точки максимума функции

$$y = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x.$$

6.297. Найдите точки максимума функции

$$y = 2\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x - 2\sqrt{3} x + 11.$$

6.298. Найдите точки минимума функции

$$y = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x + 2\sqrt{3} x - 3.$$

6.299. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 1 + 4 \sin x - 2x \text{ на отрезке } [0; \pi].$$

6.300. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -3 + 4 \sin x + 2x \text{ на отрезке } [\pi; 2\pi].$$

**Вариант экзаменационного задания
по курсу «Математика»**

1. Решите неравенство $\frac{(x + 11)(2x - 5)}{3x} \leq 0$.
2. Решите уравнение $10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$.
3. Решите уравнение $2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sqrt{2}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком.

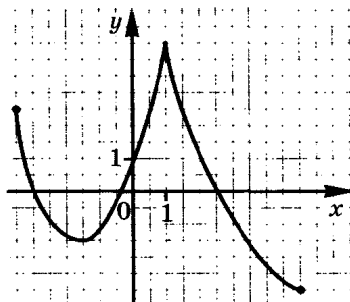
Укажите:

- а) область определения функции;
- б) при каких значениях x

$$f(x) \leq 0;$$

- в) точки экстремума функции;
- г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

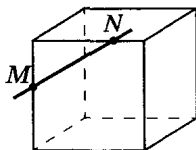
- д) наибольшее и наименьшее значения функции.



5. Найдите при $x = -\frac{\pi}{4}$ значение производной функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x.$$

6. Точки M и N расположены на ребрах куба. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.



7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг большего катета.
8. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
9. Найдите абсциссы общих точек графиков функции $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$.
10. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.

**Вариант экзаменационного задания
по курсу «Алгебра и начала анализа»**

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 3 - \log_2 (2 - 3x) = 2 - \log_2 (4 - 3x).$$

3. Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0.$$

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

- а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
- б) все значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
- в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;
- г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 3x^4 - 1$.

6. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$.

7. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.

8. Решите неравенство

$$\cos x \geq 1 + 2^x.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y = -\frac{1}{2}, \\ y^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

10. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \log_{0,5} (2x^2 - 3x - 2).$$

Справочный материал

Алгебра и начала анализа

Решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D < 0$ — нет корней,

$$D = 0 \text{ — один корень: } x = -\frac{b}{2a},$$

$$D > 0 \text{ — два корня: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Решение уравнений и неравенств

$\sqrt{f(x)} = g(x)$. Область определения задается неравенством $f(x) \geq 0$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt{f(x)^2} = |f(x)|$$

$$\log_c f(x) = \log_c g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_c f(x) < \log_c g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x), \text{ где } c > 1$$

$$\log_c f(x) < \log_c g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x) < f(x), \text{ где } 0 < c < 1$$

Степени и логарифмы

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$a^c b^c = (ab)^c$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ где } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

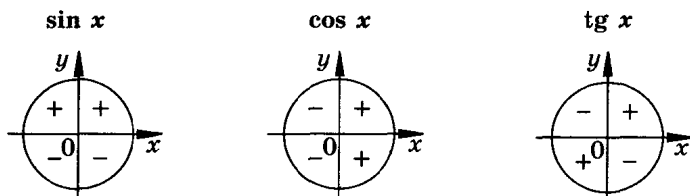
$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Тригонометрия

Знаки тригонометрических функций



Значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

β	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \beta$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \beta$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Основные тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
--	---

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Простейшие уравнения

$$\sin x = a (-1 \leq a \leq 1) \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$$

$$\cos x = a (-1 \leq a \leq 1) \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2n\pi$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + n\pi$$

n — любое целое число

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$$

n — любое целое число

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

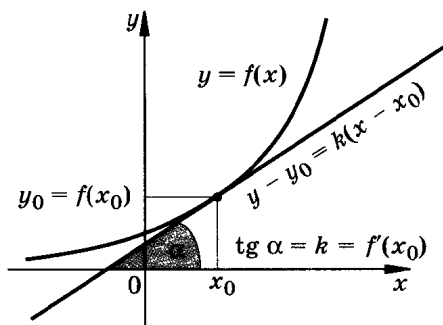
$$\text{где } \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Производная

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
kf	kf'	x^n	nx^{n-1}
$f(kx + b)$	$kf'(kx + b)$	$\sin x$	$\cos x$
$f + g$	$f' + g'$	$\cos x$	$-\sin x$
fg	$f'g + fg'$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	e^x	e^x
C	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Экстремумы функции

x_0 — критическая точка $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ — внутренняя точка } D(f), \\ f'(x_0) \text{ равно } 0 \text{ или не существует;} \end{cases}$

При переходе через x_0 f' меняет знак

с минуса на плюс

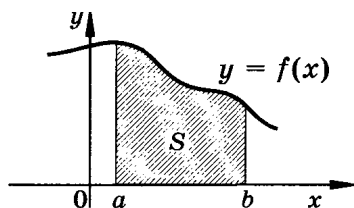
с плюса на минус

x_0 — точка минимума

x_0 — точка максимума

Первообразная

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$kf(x)$	$kF(x)$	e^x	e^x
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
C	Cx	$\sin x$	$-\cos x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $		

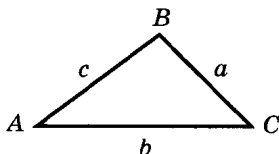


Площадь

$$S = F(b) - F(a)$$

Геометрия

Планиметрия



Треугольник

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности:

$$b - c < a < b + c.$$

Сумма углов в треугольнике:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Средней линией называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

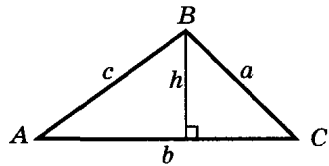
Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

где R — радиус описанной окружности.

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Площадь треугольника:

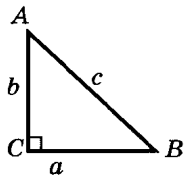
1) $S = \frac{1}{2} ah$; 2) $S = \frac{1}{2} ab \sin C$



Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$;

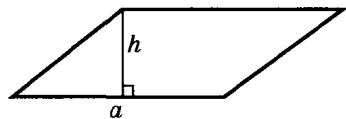
$\sin A = \frac{a}{c}$; $\cos A = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$



Параллелограмм

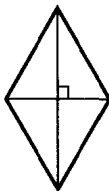
Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.
2. Противоположные стороны параллелограмма параллельны.
3. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.
4. Противоположные углы параллелограмма равны.



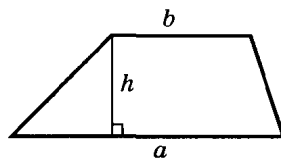
Площадь параллелограмма: $S = ah$.

Ромб



Диагонали ромба взаимно перпендикулярны

Трапеция

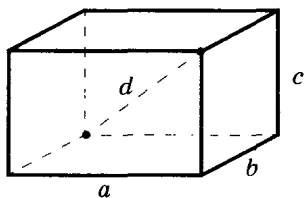


Площадь трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

Многогранники

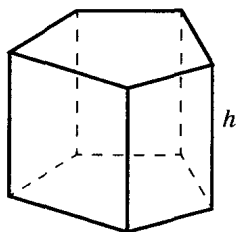
Прямоугольный параллелепипед



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2; S_{\text{бок}} = 2(ac + bc);$$

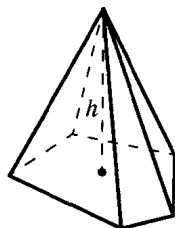
$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac); V = abc$$

Призма



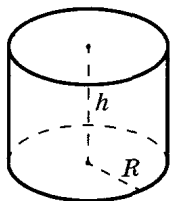
$$V = S_{\text{осн}}h$$

Пирамида



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}}h$$

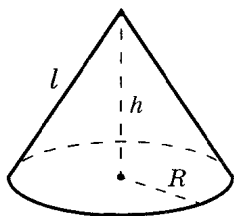
Цилиндр



$$V = \pi R^2 h;$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

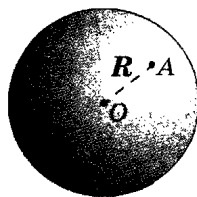
Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h;$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

Шар



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

$$S = 4\pi R^2$$